PROYECCIONES

Revista de Matemática Vol. 8/9 Pág. 65-72

1989/90 - ISSN 0716-0917

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

PROBLEMAS DE ASIGNACION SECUENCIAL NO PARAMETRICA.

Héctor Varela V.

RESUMEN

Se resuelve el problema de asignación secuencial con $k \geq 2$ procesos estocásticos independientes, siguiendo el contexto bayesiano no paramétrico de Ferguson (1973), y se demuestra que el valor de este problema es una función continua de la cantidad de información a priori que se tiene de cada uno de los procesos.

1. INTRODUCCION

Un problema de asignación secuencial discreto implica selecciones secuenciales de k procesos estocásticos independientes que son observados en cualquier orden y sólo uno de ellos en cada etapa.

Cada uno de estos procesos está asociado a una distribución de probabilidad, aquí se asume que éstas son aleatorias y siguiendo el contexto bayesiano no paramétrico de Ferguson (1973) se supone que cada distribución es un Proceso de Dirichlet de parámetro α_i ; $i = 1, \dots, k$; con cada α_i medida finita no nula. Se construye un espacio de probabilidad adecuado que permita reflejar aleatoriedad tanto en la estructura de los procesos, como en las observaciones que se obtienen al seleccionar dichos procesos. Este soporte teórico permite garantizar la existencia de estrategias de asignación secuencial óptima en el siguiente sentido: De entre todas las estrategias de asignación secuencial existe una que maximiza $E[\sum a_n Y_n]$ donde $a_n \geq 0$, $\sum a_n < \infty$ y Y_n representa la observación

en la etapa n -ésima. Finalmente se prueba que el valor del problema de asignación Bayesiano no paramétrico obtenido a través de una estrategia óptima es una función continua de la medida de confiabilidad que se tenga de cada distribución aleatoria.

2. EL MODELO

Un problema de asignación secuencial está caracterizado por el conjunto

$$D^k = \{(Q_1, \dots, Q_k) : Q_i \in D, \quad i = 1, \dots, k\}$$

donde D es el espacio de funciones de distribución de probabilidad sobre $\mathbb{R}$. La σ -álgebra $\beta(D^k)$ de Borel es la generada por la topología producto que surge de la topología definida en el espacio polaco D .

Consideremos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde

$$\begin{aligned} \Omega &= D^k \times \prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{\infty} (0,1) ; \quad \mathcal{F} = \beta(D^k) \otimes \prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{\infty} \beta((0,1)) ; \\ P &= G \times \prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^{\infty} \lambda ; \quad \text{con } G = \prod_{i=1}^k P_i , \end{aligned}$$

P_i probabilidad del proceso de Dirichlet de parámetro α_i .

Para cada par (i,n) $i = 1, \dots, k$; $n = 1, 2, \dots$, se define $Z_i(n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall \omega \in \Omega$ $Z_i(n)(\omega) = Q_i^{-1}(\omega_{in})$, la v.a. $Z_i(n)$ es el resultado del proceso i -ésimo en la etapa n sea éste observado o no. Ahora bien, si cada α_i tiene primer momento absoluto finito se tiene que

$$\begin{aligned} E[|Z_i(n)|] &= \int_{D^k} \int_{\mathbb{R}} |z| \, dQ_i(z) \, dG(Q_1, \dots, Q_k) \\ &= \int_{D^k} \int_{\mathbb{R}} |z| \, dQ_i \, dP_i(Q_i) = \\ &= \frac{1}{M_i} \int_{\mathbb{R}} |z| \, d\alpha_i(z) < \infty \end{aligned}$$

donde $M_i = \alpha_i(\mathbb{R})$ es la medida de confiabilidad que se tiene del conocimiento a priori de la distribución aleatoria Q_i , $i = 1, \dots, k$.

Y si se han obtenido n observaciones del i -ésimo proceso. Entonces (Ferguson (1973))

$$E[Z_i(n+1)/Z_i(1), \dots, Z_i(n)] = \frac{1}{M_i + n} \int_{\mathbb{R}} z \, d(\alpha_i + \sum_{j=1}^n \delta_{Z_i(j)})(z)$$

Definición

Una estrategia $T = \{T(n) : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ es un proceso estocástico $S = \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}_0^+$ - valorado sobre (Ω, F) tal que:

- i) $T(0) = 0$
- ii) $\forall n, T(n+1) = T(n) + e_i$; algún $i = 1, \dots, k$; con e_i i-ésimo vector unitario.
- iii) $T(n)$ es un "punto" de parada respecto de $\{F_s : s \in S\}$ donde $F_s = F_{s_1}^1 \vee \dots \vee F_{s_k}^k$, $s = (s_1, \dots, s_k)$.

Nota 1) La variable aleatoria $T_i(n)$ representa el número de observaciones del i-ésimo proceso cuando el número total es n.

- 2) Los procesos unidimensionales $\{T_i(n) : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$, $i = 1, \dots, k$ son no decrecientes con valores en $\mathbb{Z}_0^+$.

Dada la estrategia T, el valor observado en la etapa n-ésima está dada por la v.a. integrable $Z_T(n)$, donde

$$Z_T(n) = \sum_{i=1}^k Z_i(T_i(n)) \cdot [T_i(n) - T_i(n-1)] ; \quad n = 1, 2, \dots$$

Si $A = (a_1, a_2, \dots)$ es una sucesión tal que $a_m \geq 0 \forall m$, $\sum a_m < \infty$, denotaremos por $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$ al problema de asignación secuencial Bayesiano no paramétrico.

El valor presente del problema $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$ dada la estrategia T, es la v.a. integrable $R(T) = \sum a_n \cdot Z_T(n)$.

Definición

El valor del problema de asignación secuencial $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$ está dado por $V(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A) = \sup_T E[R(T)]$.

T_0 es óptima para $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$ si $V(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A) = E[R(T_0)]$.

El problema $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$ está caracterizado en la primera etapa por la distribución inicial

$$G = \prod_{i=1}^k P_i \quad \text{y la sucesión } A = (a_1, a_2, \dots). \quad \text{En la}$$

segunda etapa (después de la selección inicial y la toma de la observación) podemos considerar un nuevo problema de asignación secuencial caracterizado por la sucesión $A^1 = (a_2, a_3, \dots)$ y una nueva distribución inicial, la distribución a posteriori de $(Q_1, \dots, Q_k)$ dada la observación en la etapa uno, la que denotaremos por

$$G/(z_i) = P_1 \times \dots \times (P_i/z) \times \dots \times P_k$$

para señalar que el proceso i -ésimo ha sido observado en la primera etapa. P/z_i es la probabilidad de un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_i + \delta_{z_i}$ (Ferguson (1973)).

Si α_i es una medida finita sobre $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$, entonces existe un proceso de Dirichlet de parámetro α_i , por lo tanto para cada vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de medidas finitas no nulas existe una probabilidad

$$G = \prod_{i=1}^k P_i \quad \text{con } P_i \text{ probabilidad del proceso de Dirichlet de parámetro } \alpha_i,$$

que suponemos tiene media finita. Sea G el espacio de tales G .

El siguiente lema marca la estabilidad del modelo y se aplica también en los teoremas de existencia.

Lema 1.

Para cada $i = 1, \dots, k$ existe una función medible

$$f : \mathbb{R} \times G \rightarrow G \quad \text{tal que } f(z, G) = G/(z)_i.$$

3. EXISTENCIA DE UNA ESTRATEGIA OPTIMA

Sea A el espacio de sucesiones $A = (a_1, a_2, \dots)$ con $a_n \geq 0$, $\sum a_n < \infty$ y denotemos por $H = G \times A \times Z_0^+$.

Teorema 1.

Para todo $A_n \in A$; con $A_n = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ y cada $G \in G$ existe una estrategia T_{GA_n} tal que $\{(G, A_n, p) : T_{GA_n}(p) \in S\}$ es un subconjunto medible de H y T_{GA_n} es una estrategia óptima para el problema $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$.

Demostración

El conjunto de sucesiones $\{A_n : n \in Z_0^+\}$ es medible, por tanto la prueba se hace por inducción en n .

Dada la sucesión $0 = (0, 0, \dots)$; $V(\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0) = 0$ para todo vector $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tal que $G \in G$ y en este caso cada estrategia T es óptima.

Supongamos ahora que el teorema se cumple para toda sucesión A tal que $m < n$. Luego dada la sucesión $A_{n-1} = A^1$ y si denotamos por $G^{(1)} = G/(z)_i$, existe $T_{G^{(1)}A^1}$ tal que el conjunto

$$\{ (G^{(1)}, A^1, k) : T_{G^{(1)}A^1}^{(k)} \in S \}$$

es un subconjunto medible de H y la estrategia $T_{G^{(1)}A^1}^{(1)}$ es óptima para el problema $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A^1)$ entonces el valor de este problema satisface:

$$V(G/(z_i), A^1) = E[R(T_{G^{(1)}A^1}^{(1)})]$$

Definamos una estrategia T_{GA}^i de tal modo que selecciona el i -ésimo proceso inicialmente y luego procede en forma óptima; es decir $T_{GA}^i(1) = e_i$ y $T_{GA}^i(m) = T_{G^{(1)}A^1}^{(m-1)} \quad \forall m > 1$

$$\text{además,} \quad V(G^{(1)}, A^{(1)}) = E \left[\sum_{m=1}^{n-1} a_m T_{GA}^i(m) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{pero} \quad R(T_{GA}^i) &= E[a_i Z_{T_{GA}^i}^i(1)] + V(G^{(1)}, A^1) \\ &= E[a_i Z_i(1)] + V(G^{(1)}, A^1) \quad \forall i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

y se tiene

$$(3.1) \quad V(G, A) = \max_{1 \leq i \leq k} E[a_i Z_i(1) + V(G^{(1)}, A^{(1)})]$$

basta elegir cualquier i que satisfaga (3.1) y se tiene que T_{GA}^i es una estrategia óptima.

Como las aplicaciones $A \rightarrow A^{(1)}$ y $G \rightarrow G/(z)_i$ son medibles, el conjunto

$$\{(G, A, k) : T_{GA}^i(k) \in S\} = \{(G^{(1)}, A^1, k-1) : T_{G^{(1)}A^1}^{(k-1)} \in S\}$$

es un subconjunto medible de H .

Observación

La expresión (3.1) permite encontrar $V(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A_n)$ en forma recursiva, pero la recursividad es hacia atrás, esta metodología se conoce como Método de Inducción hacia atrás o como Programación Dinámica, además ésta se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 V(G, A_n) &= \max_{1 \leq i \leq k} \int_D \int_{\mathbb{R}} [a_1 z + V(G/(z)_i, A^1)] dQ_i(z) dG(Q_1, \dots, Q_k) \\
 &= \max_{1 \leq i \leq k} \int_D \int_{\mathbb{R}} [a_1 z + V(G/(z)_i, A^1)] dQ_i(z) dP_i(Q_i)
 \end{aligned}$$

Las siguientes desigualdades permiten probar la existencia de es estrategias óptimas para cualquier sucesión $A \in A$ y $G \in G$.

$$-\infty < \bigvee_{i=1}^k E[Z_i(1)]|A| \leq V(G, A) \leq E\left[\bigvee_{i=1}^k E[Z_i(1)/Q_i]\right]|A|$$

$$(3.2) \quad \leq E\left[\bigvee_{i=1}^k Z_i(1)\right]|A| < \infty$$

donde

$$|A| = \sum a_n.$$

Teorema 2

Para cada $A \in A$ y cada $G \in G$, existe una estrategia T_{GA} tal que $\{(G, A, p) : T_{GA} \in S\}$ es un subconjunto medible de H y la estrategia T_{GA} es óptima para el problema $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, A)$.

Demostración

Definamos T_{GA} recursivamente

$$T_{GA}(1) = e_i \quad \text{con el primer } i = 1, \dots, k \text{ para el que se obtiene el máximo en la expresión (3.1)}$$

$$T_{GA}(p) = T_{G^{(1)}_{A_1}}(p-1) \quad p > 1; \quad \text{con } G^{(1)} = G/(z)_i$$

la medibilidad del conjunto $\{(G, A, p) : T_{GA}(p) \in S\}$ se sigue por un argumento de inducción sobre p y usando el lema 1

Notemos que

$$V(G, A) = E[R(T_{GA})] = E[a_1 Z_{T_{GA}}(1) + V(G^{(1)}, A^1)]$$

y por inducción

$$V(G, A) = E\left[\sum_{m=1}^n a_1 Z_{T_{GA}}(m) + V(G^{(n+1)}, A^{n+1})\right];$$

como

$$|E\left[\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m Z_{T_{GA}}(m)\right]| \leq E\left[\bigvee_{i=1}^d |Z(1)|\right]|A^{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

de (3.2) tenemos que

$$|V(G^{(n+1)}, A^{n+1})| \leq E \left[\sum_{i=1}^k |Z_i(1)| \right] |A^{n+1}|$$

por lo tanto

$$E [|V(G^{(n+1)}, A^{n+1})|] \leq E \left[\sum_{i=1}^k |Z_i(1)| \right] |A^{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

y en consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m Z_{T_{GA}}(m) - V(G^{(n+1)}, A^{n+1}) \right] = 0$$

lo que indica que T_{GA} es una estrategia óptima.

4. ESTUDIO DE LA CONTINUIDAD DE V

Si F es un proceso de Dirichlet de parámetro α , se define la función de distribución $F_0(z) = \alpha(-\infty, z] / M$ donde $M = \alpha(\mathbb{R})$ lo que indica que α se puede escribir como MF_0 . Ahora bien, la Ley Fuerte de los Grandes números permite definir el proceso de Dirichlet impropio de parámetro $\infty \cdot F$; el que caracterizará a todos aquellos procesos estocásticos que generan observaciones independientes e idénticamente distribuidas según F , además si la media μ de F es conocida entonces el parámetro $\infty \cdot F$ es equivalente al parámetro δ_μ .

Por otra parte vía un resultado de Sethuraman y Tiwari (1982), se define el proceso de Dirichlet impropio de parámetro $0 \cdot F$ que identificará a todos aquellos procesos que proporcionan observaciones que son idénticamente distribuida y coinciden c.s.

En general $V(\cdot, A)$ es no continua en cada α_i , sin embargo con la introducción de los procesos de Dirichlet impropios, puede estudiarse la continuidad de la función $V(\cdot, A)$ en M_i , $i = 1, \dots, k$.

Teorema 3

Si cada F_i ; $i = 1, \dots, k$ es una función de distribución de probabilidad con primer momento absoluto finito, entonces $V(M_1 F_1, \dots, M_k F_k, A_n)$ es una función continua para cada $M_i \in [0, \infty]$ $\forall i = 1, \dots, k$.

Demostración

Por inducción, aplicación de las desigualdades (3.2) y el Teorema de Convergencia Dominada se obtienen los siguientes límites, $\forall i = 1, \dots, k$.

$$\lim_{M_i \rightarrow 0} V(M_1 F_1, \dots, M_i F_i, \dots, M_k F_k, A_n) = V(M_1 F_1, \dots, 0 F_i, \dots, M_k F_k, A_n)$$

$$\lim_{M_i \rightarrow M_0} V(M_1 F_1, \dots, M_i F_i, \dots, M_k F_k, A_n) = V(M_1 F_1, \dots, M_0 F_i, \dots, M_k F_k, A_n)$$

con $M_0 \in (0, \infty)$

$$\lim_{M_i \rightarrow \infty} V(M_1 F_1, \dots, M_i F_i, \dots, M_k F_k, A_n) = V(M_1 F_1, \dots, \delta_{\mu_i}, \dots, M_k F_k, A_n)$$

Lo que prueba la continuidad de V en cada $M_i \in [0, \infty]$.

REFERENCIAS

- [1] BASU, R.B. and TIWARI, R.C. (1982) "A note on the Dirichlet Processes". Statistics and Probability, North Holland Publishing Company. 89-103.
- [2] BERRY, D.A. and FRISTEDT, B. (1985) "Bandit Problems. Sequential allocation of experiments". Chapman and Hall.
- [3] FERGUSON, T.S. (1973) "A Bayesian analysis of some nonparametric problems". Ann.Statis., 1. 209-230.
- [4] SETHURAMAN, J. and TIWARI, R.C. (1982) "Convergence of Dirichlet measures and interpretation of their parameter". Statistical Decision Theory and Related Topics III 2. 305-315 Academic Press.

Héctor Varela V.

Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias Básicas
Universidad de Antofagasta. Casilla 170.
Antofagasta - CHILE.