PROYECCIONES

Revista de Matemática Vol. 8/9 Pág. 41-46

1989/90 - ISSN 0716-0917

Universidad Católica del Norte

Antofagasta - Chile

APROXIMACION PARABOLICA DE CURVAS EN EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Pedro Huerta
Héctor Rojo J.
Jorge Rojo J.
Fernando Zamorano

R E S U M E N

La aplicación del método de elementos finitos a problemas para los cuales se requiere una solución sobre un dominio bidimensional con una frontera que es totalmente o parcialmente curva, envuelve el uso de algunos elementos con lados curvos. El lado curvo puede ser aproximado por arcos parabólicos que pasan por los puntos extremos de cada segmento de curva. Los parámetros libres restantes de la parábola pueden ser usados para optimizar el ajuste, exigiendo determinadas condiciones propias del método de los elementos finitos. Para obtener una "medida" del ajuste se introduce una medida geométrica de la discrepancia entre la curva dada y una parábola que conduce a un problema de optimización en dos variables.

1. INTRODUCCION

Frecuentemente las transformaciones isoparamétricas del triángulo unitario son utilizadas para aproximar un elemento finito con uno o más lados curvos. Esto conduce a la aproximación de un segmento de curva dada por un arco parabólico [4] que pasa por los dos puntos extremos del segmento. Una forma particularmente conveniente de parametrizar los grados de libertad restantes de la parábola es escoger un punto sobre la hipotenusa del triángulo unitario y usar las coordenadas de la imagen (α, β) del punto escogido como parámetros de la transformación [5]. Los requerimientos de que la base sea estable en el límite ([3], [4]), y que la transformación evite elementos prohibidos [5] conducen a restricciones sobre la posición de imagen del punto. El problema de aproximación así obtenido es el objetivo de este trabajo.

Es difícil definir una noción satisfactoria de la discrepancia entre dos curvas. Enfoques basados en normas L_p son aplicables sólo cuando ambas curvas se pueden expresar en la forma $P(x, y(x))$ en algún sistema de coordenadas. El enfoque que se presenta en este trabajo es asumir que la curva dada está representada por puntos $Q(s)$ que dependen de un parámetro s , construir una descripción de la aproximación vía parábola por puntos $P(s)$ que dependen del mismo parámetro y usar la norma

$$d(\alpha, \beta, s) = \text{distancia } (P(s), Q(s))$$

como medida de discrepancia. La manera en la cual la función $s \rightarrow P(s)$ se obtiene utilizando propiedades de la parábola y no es generalizada a otras aproximaciones.

Una ventaja de este enfoque es que la expresión para

$$F(\alpha, \beta) = \int d^2(\alpha, \beta, s) ds$$

es simple para servir como función objetivo, dependiendo de dos parámetros libres, que debe ser optimizada sujeta a las condiciones descritas anteriormente.

2. EL PROBLEMA DE OPTIMIZACION RESTRINGIDO

Consideremos el elemento general con dos lados rectos y un lado curvo con vértices en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, donde el lado curvo une los dos últimos puntos, en el sistema de coordenadas $x-y$.

Se requiere una parábola de aproximación que pase por los puntos extremos del lado curvo y sea la imagen de la hipotenusa del triángulo unitario bajo la transformación isoparamétrica.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^6 x_i f_i(p, q) \\ y &= \sum_{i=1}^6 y_i f_i(p, q), \end{aligned} \quad (1)$$

Las funciones f_i corresponden a las funciones de base

$$f_1(p, q) = (1 - p - q)(1 - 2p - 2q)$$

$$f_2(p, q) = p(2p - 1)$$

$$f_3(p, q) = q(2q - 1)$$

$$f_4(p, q) = 4pq$$

$$f_5(p, q) = 4p(1 - p - q)$$

$$f_6(p, q) = 4q(1 - p - q)$$

asociadas a los nodos (0,0), (1,0), (0,1), (1/2,1/2), (1/2,0) y (0,1/2) respectivamente.

La transformación isoparamétrica (1) con selectos valores (x_i, y_i) está dada por

$$\begin{aligned}x &= p + 2pq (2\alpha - 1) \\y &= q + 2pq (2\beta - 1)\end{aligned}\quad (2)$$

con Jacobiano de transformación

$$J(p,q) = 1 + 2(2\beta - 1)p + 2(2\alpha - 1)q$$

Las condiciones para que el Jacobiano tenga el mismo signo sobre el triángulo, o equivalentemente, en los vértices, pueden expresarse en la forma

$$\alpha > 1/4, \quad \beta > 1/4. \quad (3)$$

Las condiciones (3) son conocidas como la regla del cuarto punto.

El segmento de curva que aproxima al lado curvo del elemento en consideración es la imagen de la hipotenusa bajo la transformación (1) y está dada en forma paramétrica por

$$\begin{aligned}x &= p + 2p(1 - p) (2\alpha - 1) \\y &= 1 - p + 2p(1 - p) (2\beta - 1)\end{aligned}\quad (4)$$

para $0 \leq p \leq 1$.

La pendiente axial de la parábola (4) es

$$(2\beta - 1) / (2\alpha - 1) \quad (5)$$

con el caso $\alpha = 1/2$ interpretado como una parábola con eje vertical. Notar que la línea que une el punto (α, β) con el punto (1/2,1/2) tiene también la pendiente (5).

Las ecuaciones (4) representan una familia biparamétrica de parábolas que pasa por los puntos (1,0), (0,1). Seleccionando adecuadamente el punto (α, β) se determinará un único miembro de esta familia. Una cónica tiene cinco grados de libertad y la condición que restringe que la cónica sea una parábola es cuadrática. En general, entonces, hay dos parábolas que pasan por cuatro puntos. Así, aunque una parábola tenga cuatro grados de libertad, no siempre un conjunto de cuatro condiciones determinan una única parábola. Sin embargo, cuando se requiere que la parábola pase por tres puntos y tenga una pendiente prescrita en uno de esos puntos, la parábola será única sólo cuando la pendiente prescrita sea igual a la pendiente de la línea que une los otros dos puntos de in-

terpolación.

El punto (α, β) que ocurre para $p = 1/2$ tiene exactamente esta propiedad, puesto que la tangente allí tiene pendiente -1 y entonces seleccionando adecuadamente el punto (α, β) se determinará una única parábola.

Los elementos bajo consideración son utilizados en el método de las transformaciones de alto orden (método HOT) [3], y en particular para funciones de base de segundo orden estables en el límite implementadas en [6]. La posición del punto (α, β) cuando la curva se degenera a una línea recta determinará la estabilidad en el límite [1]. El único requerimiento para asegurar la estabilidad en el límite es que la pendiente axial de la parábola sea acotada lejos de -1 , o equivalentemente

$$-\frac{1}{m} \leq \frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 2\beta - 2} \leq \frac{1}{m} \quad (6)$$

donde m es un número positivo llamado factor de seguridad de la estabilidad. Geométricamente, esto puede ser interpretado como la pendiente axial límite para la cual la parábola que pasa por los puntos extremos del segmento de curva dado es considerada una curva y no una línea recta.

(i) Elemento finito convexo.

(ii) Elemento finito cóncavo

Figura 1. Dominio de factibilidad.

Los valores de los parámetros α y β determinan unívocamente el arco parabólico por el cual la curva dada es aproximada y de aquí, también, la discrepancia entre dichas curvas. Las restricciones asociadas a la regla del cuarto punto (3) y las de estabilidad en el límite (6) definen el dominio de factibilidad en el cual el punto (α, β) puede ubicarse para la aproximación parabólica (4) a la curva dada. (Figura 1).

3. LA MEDIDA DE DISCREPANCIA

La parábola se diferencia de las otras cónicas por el hecho de que toda línea paralela a su eje tiene exactamente una intersección real finita con ella. Para cualquier punto Q en la curva dada, la línea que pasa por este punto y es paralela al eje de la parábola, es decir, con pendiente $(2\beta - 1) / (2\alpha - 1)$, tiene una única intersección P con la parábola de aproximación. (Figura 2).

Figura 2. Parábola de aproximación.

Asumamos que la curva dada está parametrizada en la forma

$$x = A(s), \quad y = B(s)$$

con $A(0) = 0$, $A(1) = 1$, $B(0) = 1$, $B(1) = 0$, $0 \leq s \leq 1$.

La medida de discrepancia que consideramos está relacionada con la norma L_2 ,

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^1 [\text{distancia}(Q(s), P(s))]^2 ds \quad (7)$$

donde $P(s)$ es el punto en la parábola que corresponde a $Q(s)$ para cualquier valor del parámetro s en el intervalo $[0,1]$. Las coordenadas del punto $P(s)$ pueden ser calculadas fácilmente. La línea que pasa por $(A(s), B(s))$ con pendiente $(2\beta - 1) / (2\alpha - 1)$ intersecta a la parábola para el valor

$$p(s) = \frac{(2\beta - 1)A(s) - (2\alpha - 1)B(s) + 2\alpha - 1}{2\alpha + 2\beta - 2} \quad (8)$$

el cual está definido, a menos que $\alpha + \beta - 1 = 0$, lo que no puede ocurrir si consideramos las restricciones para la estabilidad en el límite (6). Si reemplazamos (8) en (4), se obtiene una reparametrización de la parábola de aproximación en términos del parámetro s usado en la parametriza

ción de la curva dada. Después de efectuar los cálculos pertinentes resulta

$$[\text{dis}(Q,P)]^2 = [(2\alpha - 1)^2 + (2\beta - 1)^2] \left[\frac{1 - A(s) - B(s)}{2\alpha + 2\beta - 2} + 2p(s)(1 - p(s)) \right]^2$$

y por sustitución de esta última expresión en (7) se obtiene la medida total de discrepancia $F(\alpha, \beta)$, y los parámetros α, β serán considerados óptimos cuando

$$F(\alpha, \beta) = [(2\alpha - 1)^2 + (2\beta - 1)^2] \int_0^1 \left[\frac{1 - A(s) - B(s)}{2\alpha + 2\beta - 2} + 2p(s)(1 - p(s)) \right]^2 ds$$

sea mínima, sujeta a las restricciones

$$\alpha > 1/4$$

$$\beta > 1/4$$

$$-\frac{1}{m} \leq \frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 2\beta - 2} \leq \frac{1}{m}$$

REFERENCIAS

- [1] BAART, M.L. Curved Finite Elements and Curve Approximation. Technical report. National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1985.
- [2] GOLUB, G.H. and PEREYRA, V. The differentiation of pseudo-inverses and non linear least squares problems whose variables separate. SIAM J. Numer. Anal. 10, 413-432 (1973).
- [3] McLEOD, R.J.Y. On the stability of two-dimensional interpolation and high order bases for curved finite elements. Comp. & Maths. with Appls. 5, 249-265 (1979).
- [4] _____. Some applications of geometry in numerical analysis. In: Proceedings of the 9th. Conference on Numerical Analysis, Dundee, 1981. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
- [5] MITCHELL, A.R. and WAIT, R. The finite element method in partial differential equations. J. Wiley and Sons. London, New York, Sydney, Toronto, 1977.
- [6] ROJO, H.J. Basis functions in curved finite elements. Doctoral dissertation, New Mexico State University, 1985.

Pedro Huerta M., Héctor Rojo J., Jorge Rojo J., Fernando Zamorano G.
Departamento de Matemáticas
Universidad de Antofagasta
Casilla 170 Antofagasta - CHILE