UNA NOTA SOBRE EL METODO SIMPLEX Y LA DESCOMPOSICION LU

JULIO PEÑA R.*

MARCIA ROJAS S.*

RICARDO SOTO M.*

•

RESUMEN.

En un ciclo o paso completo del Método Simplex es necesario resolver 3 sistemas de ecuaciones lineales. La matriz de coeficiente B es la misma en dos de estos sistemas, mientras que en el tercero es B^T . Estos sistemas pueden ser resueltos con ventajas por medio de la Descomposición LU. En esta nota se discute cómo el Método Simplex con Descomposición LU puede ser llevado a cabo cuando intercambio de filas es requerido durante el proceso.

* Académico Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Humanidades, Universidad del Norte. Chile.

1. INTRODUCCION.

El método de Descomposición LU es un método bastante popular para resolver un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz $n \times n$ no singular. El método consiste en encontrar una factorización de A de la forma $A = LU$, donde L es una matriz bajo triangular con unos en la diagonal, mientras que U es una matriz sobre-triangular. De este modo, el sistema lineal $Ax = b$ se reduce a $LUx = b$, el cual puede descomponerse en los dos sistemas triangulares

$$(1) \quad Ly = b$$

$$(2) \quad Ux = y$$

Una ventaja de esta factorización reside en que (1) puede resolverse fácilmente por sustitución hacia adelante encontrando y y luego (2) es resuelto por sustitución hacia atrás encontrando x . Así, resolver $Ax = b$ por descomposición LU requiere del orden de n^2 operaciones aritméticas si L y U son conocidas, mientras que hacerlo por eliminación Gaussiana requiere del orden de $\frac{1}{3}n^3$ operaciones aritméticas.

Una más significativa ventaja del método LU es su considerable ahorro de almacenamiento en el computador. En efecto, los ceros en L y en U no necesitan ser guardados como tampoco los unos en la diagonal de L . Así una vez computadas las entradas l_{ij} ($i > j$) de L y u_{ij} ($i \leq j$) de U , éstas pueden ser guardadas en las correspondientes posiciones (i, j) de los elementos de A , como se muestra en el siguiente esquema compacto donde $A = LU$ es de orden 4.

$$A \longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & u_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & u_{44} \end{bmatrix}$$

Condiciones para la existencia y unicidad de la Descomposición LU pueden hallarse en [3] (p. 154). Allí se prueba también que si A es no singular, una descomposición LU siempre existe, aunque en este caso intercambio de filas puede ser requerido. En este caso el proceso es más complicado, pues es necesario mantener registro de similares intercambios en el vector del lado derecho.

•

Consideremos ahora el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} (3) \quad & \text{minimizar} && c^T x \\ & \text{sujeto a} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Sea B la submatriz de A formada por las m columnas de A correspondientes a las variables básicas. Estas columnas son vectores linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base de $\mathbb{R}^m$. Sin pérdida de generalidad supondremos que B consiste de las primeras m columnas de A .

Particionando A , x y c en la forma

$A = [B, D]$, $x^T = (x_B^T, x_D^T)$, $c^T = (c_B^T, c_D^T)$, el problema (3) puede escribirse como

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{minimizar} && c_B^T x_B + c_D^T x_D \\ &\text{sujeto a} && Bx_B + Dx_D = b \\ &&& x_B \geq 0, \quad x_D \geq 0 \end{aligned}$$

Dada la actual matriz base B , un paso o ciclo del método Simplex requiere efectuar los siguientes cálculos:

1. Resolver $Bx = b$ para obtener la solución básica x_B .
2. Resolver $B^T \lambda = c_B$ y poner $r_D^T = c_D^T - \lambda^T D$ (el vector de costos relativo). Si $r_D \geq 0$, parar. La actual solución x_B es óptima. De otro modo,
3. Determinar cuál vector v_k va a entrar a la base y resolver $By_k = v_k$, donde y_k da las coordenadas de v_k relativas a la actual base B .
4. Determinar cuál vector dejará la base calculando las razones $\frac{y_{io}}{y_{ik}}$, $y_{ik} > 0$, donde $y_o = b$.
5. Actualizar la matriz B y volver a 1.

El proceso entonces requiere computar los sistemas

$$(5) \quad Bx = b$$

$$(6) \quad B^T \lambda = c_B$$

$$(7) \quad By_k = v_k$$

Así, si podemos factorizar B como $B = LU$, cada uno de estos sistemas puede ser resuelto computando la solución de un par de sistemas triangulares como los definidos en (1) y (2).

2. EL METODO SIMPLEX USANDO DESCOMPOSICION LU.

Sea $B = LU$. Entonces $L^{-1}B = U$ y el efecto de L^{-1} sobre B es transformar esta matriz en una matriz sobre triangular U . Así, si conocemos L^{-1} , el sistema $Bx = b$ puede ser resuelto por sustitución hacia atrás de $Ux = L^{-1}b$. Un resultado similar, esto es, una transformación de B en la matriz U es obtenido aplicando a B el proceso de eliminación Gaussiana con intercambio de filas. Los siguientes pasos de esta técnica son conocidos:

Sea B de orden m .

Paso 1 : $B^{(0)} = B$.

Paso k : $B^{(k-1)} = \{b_{ij}^{(k-1)}\}$. Determinar p tal que $|b_{pk}^{(k-1)}| = \max \{|b_{ik}^{(k-1)}| : i = k, k+1, \dots, m\}$. Entonces intercambiar filas k y p en $B^{(k-1)}$ y usar eliminación Gaussiana para hacer zeros las entradas $b_{ik}^{(k-1)}$, $i \geq k+1$. Si $k < m-1$, ir al paso $k+1$.

Observemos que intercambiar las filas k y p en $B^{(k-1)}$ es equivalente a premultiplicar $B^{(k-1)}$ por una matriz de permutación P , la cual es definida como la matriz identidad con sus filas k y p permutadas. De un modo similar, el anular los elementos $b_{ik}^{(k-1)}$, $i \geq k+1$ en la k -ésima columna de $B^{(k-1)}$ es equivalente a premultiplicar $PB^{(k-1)}$ por la matriz elemental E de la forma.

$$(8) \quad E = \left[\begin{array}{c|c} I_{k \times k} & 0 \\ \hline S & I \end{array} \right],$$

donde S es una matriz de orden $(m-k) \times k$ que tiene sus primeras $(k-1)$ columnas nulas y su k -ésima columna de la forma $S_k = (S_{1k}, S_{2k}, \dots, S_{m-k,k})^T$, donde

$$S_{ik} = \frac{-b_{ik}^{(k-1)}}{b_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, k+2, \dots, m. \quad \text{Esto es:}$$

$$(9) \quad S = \left[\begin{array}{c} \bigcirc \\ S_{1k} \\ S_{2k} \\ \vdots \\ S_{m-k,k} \end{array} \right] \quad \bullet$$

Así, el proceso de eliminación Gaussiana sobre la matriz B puede ser efectuado por una sucesión de matrices $E_j P_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$. Es decir,

$$(10) \quad E_{m-1} P_{m-1} \dots E_2 P_2 E_1 P_1 B = U$$

Puesto que las matrices P_j son matrices de permutación y las E_j son matrices bajo triangulares, hay claras ventajas en el almacenamiento de ellas.

Notemos también que si todas las matrices de permutación son iguales a la matriz identidad, entonces el producto $\prod_{j=1}^{m-1} E_{m-j} P_{m-j}$ es una matriz bajo triangular que podemos llamar L^{-1} .

Veamos ahora como la descomposición LU de B puede ser actualizada cuando un vector entra a la base y otro sale de ella en un paso completo del Método Simplex.

Sea $B = LU$, donde $B = [v_1, v_2, \dots, v_m]$ con v_i como la i -ésima columna de B. Supongamos que en el j -ésimo paso del Método Simplex, el vector v_q ($m < q \leq n$) entra a la base mientras que el vector v_r sale de ella. La matriz B cambia a

$$(11) \quad \bar{B} = [v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_m, v_q].$$

•

Sea

$$(12) \quad M = \prod_{j=1}^{m-1} E_{m-j} P_{m-j}.$$

Entonces de (10) tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{M}\bar{B} &= [Mv_1, \dots, Mv_{r-1}, Mv_{r+1}, \dots, Mv_m, Mv_q] \\ &= [u_1, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, \dots, u_m, Mv_q] \\ &= H, \end{aligned}$$

donde u_i es la i -ésima columna de U. La matriz $H = (h_{ij})$ es conocida como una matriz de Hessemberg y tiene una particular estructura con $h_{ij} = 0$ para $i > j$, $1 \leq j \leq r-1$ y $h_{kl} = 0$ para $k > l+1$, $r \leq l \leq n$. Por ejemplo, para $n = 6$, $r = 3$, tenemos

$$H = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

Ahora bien, la matriz H puede ser reducida a una matriz sobre triangular aplicando una serie de transformaciones definidas por matrices de permutación $\hat{P}_r$ y matrices elementales $\hat{E}_r$ construidas como sigue:

i) Si $|h_{r+1,r}| > |h_{rr}|$, $\hat{P}_r$ es la matriz identidad con las filas r y $r+1$ intercambiadas.

ii) Si $|h_{rr}| \geq |h_{r+1,r}|$, $\hat{P}_r = I$

La matriz $\hat{E}_r$ es ahora simplemente la matriz identidad con un elemento no nulo s en la posición $(r+1, r)$

$$(13) \quad \hat{E}_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & s & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$(14) \quad s = s_{r+1,r} = \frac{-\bar{h}_{r+1,r}}{\bar{h}_{rr}}$$

con $\bar{h}_{rr}$ y $\bar{h}_{r+1,r}$ las correspondientes entradas de H después de premultiplicar por $\hat{P}_r$.

Así si $\hat{E}_r \hat{P}_r$ representa la transformación efectuada sobre H en el paso r -ésimo y

$$(15) \quad \hat{M} = \prod_{j=1}^{m-r} \hat{E}_{m-j} \hat{P}_{m-j},$$

entonces

$$(16) \quad \hat{M} H = \bar{U}.$$

y

$$(17) \quad \hat{M} M \bar{B} = \bar{U}.$$

Observemos que si las matrices P_j y $\hat{P}_r$ son todas iguales a la identidad, es decir, que intercambio de filas no es requerido, entonces M y $\hat{M}$ dadas por (12) y (15) son matrices bajo triangulares no singulares y consecuentemente los productos $\hat{M}M$ y $M^{-1}\hat{M}^{-1}$ también lo son. Así, poner $\bar{L}^{-1} = \hat{M}M$ en (17) conduce a

$$(18) \quad \bar{B} = \bar{L}\bar{U},$$

es decir, a una descomposición LU para $\bar{B}$.

Si intercambio de filas es necesario durante el proceso, las ma-

trices M y $\hat{M}$ no son necesariamente bajo triangulares y una estricta descomposición LU como dada en (18) no se obtiene. En este caso entonces, de (17) tenemos que el sistema $\bar{B}z = c$ puede reducirse a

$$(19) \quad \bar{U}z = \hat{M} M c ,$$

el que puede resolverse por sustitución hacia atrás una vez computado $\hat{M} M c$. De este modo entonces, en cada ciclo del Método Simplex, los sistemas (5) y (7) de los pasos 1 y 3, respectivamente, pueden ser resueltos aplicando (17) y (19), es decir,

$$(20) \quad \bar{U}x = \hat{M} M b$$

$$(21) \quad \bar{U}y_k = \hat{M} M v_k .$$

El sistema (6) del paso 2 es resuelto similarmente. •

Queremos comentar aquí que otra implementación del Método Simplex basada en la descomposición LU es presentada en [1], la cual considera el método de dos Fases.

En esa versión, cada vez que una variable básica llega o ser no básica, un intercambio de filas y columnas es aplicado a la matriz B , de modo que B siempre tiene la forma triangular en bloques

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & Q \end{array} \right) .$$

La descomposición LU de B es alcanzada cuando la descomposición $Q = \tilde{L}\tilde{U}$ ha sido computada

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{L} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I & P \\ \hline 0 & \tilde{U} \end{array} \right)$$

Los sistemas triangulares que resultan en esta implementación son resueltas en un modo eficiente por el algoritmo 350 de Bartels and Golub [2].

3. El siguiente ejemplo, casi trivial desde el punto de vista computacional, ilustra cómo el Método Simplex con el uso de la descomposición LU discutido en la sección 2, en el cual intercambio de filas es requerido, puede ser aplicado a un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Minimizar } & c^T x = -(3x_1 + x_2 + 3x_3) \\ \text{sujeto a } & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Introduciendo las variables x_4, x_5, x_6 , las condiciones del problema toman la forma $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Sean $v_1, v_2, \dots, v_6$ las columnas de A . La actual matriz base es $B = I$ de orden 3.

1º Ciclo:

Paso 1: $Bx = b$ implica $x_B = (x_4, x_5, x_6)^T = (2, 5, 6)^T$

Paso 2: $B^T \lambda = C_B = 0$ implica $\lambda = 0$ y $r_D = (-3, -1, -3)^T$.

Paso 3: Decidimos llevar el vector v_1 a la base. Entonces $y_1 = v_1 = (2, 1, 2)^T$.

Paso 4: El vector v_4 sale de la base.

Paso 5: $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [v_5, v_6, v_1]$.

2º Ciclo:

Paso 1: Resolver $\bar{B}x = b$. Premultiplicando por las matrices apropiadas, tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{B}x = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos el sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y \quad x = (1, 0, 0, 0, 4, 4)^T \quad \text{con} \quad c^T x = -3.$$

Paso 2: Resolver $\bar{B}^T \lambda = c_B = (0, 0, -3)^T$. De (19) obtenemos el sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$r_D^T = (r_2, r_3, r_4) = c_D^T - \lambda^T D$$

$$\begin{aligned} & \bullet \\ & = (-1, -3, 0) - \left(-\frac{3}{2}, 0, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Paso 3: v_3 entra a la base y resolvemos $B y_3 = v_3$. De (21) tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} y_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de donde $y_3 = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Paso 4: v_5 sale de la base.

Paso 5: $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [v_6, v_1, v_3]$

3º Ciclo:

Paso 1: Resolver $\bar{B}x = b$, con $x = (x_6, x_1, x_3)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{B}x = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

lo cual da $x = (\frac{1}{5}, 0, \frac{8}{5}, 0, 0, 4)^T$ con $c^T x = -\frac{27}{5}$.

Paso 2: $r_D^T > 0$. Por lo tanto la actual solución es optimal.

BIBLIOGRAFIA.

1. Bartels, R. y Golub, G. The Simplex Method of Linear Programming Using LU Decomposition, Communications ACM, Vol. 12, 5: 266-268, 1969.
2. Bartels, R. y Golub, G. Algorithm 350. Simplex Method Employing LU Decomposition, Comm. ACM, Vol. 12, 5: 275-278, 1969.
3. Dahlquist, G. y Björck, A. Numerical Methods. Prentice-Hall, 1974.
4. Luenberger, D. Linear and Nonlinear Programming, Second Edition, Addison-Wesley P.C., 1984.