TRAYECTORIAS OPTIMAS PARA UN SISTEMA LINEAL NO AUTONOMO

VICTOR DELGADO A.*

MARIA ELENA SAN MARTIN A.*

RESUMEN.

El objetivo de este trabajo es presentar el retrato fase de trayectorias de un sistema de control lineal en el plano, no autónomo y con restricción de estado, que transfieren al origen cada punto de la restricción. Para demostrar que tales trayectorias son óptimas en el sentido de alcanzar el origen en tiempo mínimo, se aplica un criterio de suficiencia para inclusiones diferenciales.

INTRODUCCION.

La determinación explícita de trayectorias óptimas para proble-

* Instituto de Matemáticas, Universidad Austral de Chile. Proyecto RS-83-2 Dir. Invest. UACH.

mas de control de tiempo mínimo se conoce sólo para sencillos sistemas lineales autónomos como aparece, por ejemplo en [1], [3] y [4].

En este trabajo se considera, en primer lugar, un sistema de control lineal en el plano, no autónomo y con restricción de estado. Luego se construyen, mediante el uso de controles seccionalmente constantes, trayectorias del sistema que transfieren al origen cada punto de la restricción. Finalmente se aplican las condiciones suficientes de Blagodatskikh, (ref. [2]), para demostrar su optimalidad en el sentido de alcanzar el origen en tiempo mínimo.

Consideremos entonces el sistema

$$\dot{x} = y + tv \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{y} = w \quad y(t_0) = y_0$$

$$u = (v, w) \text{ control medible en } U = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

(1)

Se sabe que para cada control u existe una solución única absolutamente continua que satisface (1) c.t.p. y si $u = (a, b)$ es constante sobre un intervalo que contenga a t_0 , entonces la solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ está dada por:

$$(x, y) = (x_0, 0) + (0, y_0) + (t - t_0) \left(\frac{a+b}{2} (t + t_0) - bt_0 + y_0, b \right).$$

Es decir, para construir el retrato fase para un control constante dado, basta considerar la trayectoria que corresponde al punto inicial $(0, y_0)$ y luego trasladarla sumando el vector $(x_0, 0)$.

Si se hace variar el tiempo inicial t_0 , entonces desde cada punto $(0, y_0)$ se genera un "manto" de trayectorias.

En las figuras 1, 2, 3, y 4 se ilustran cuatro pasos particulares considerando los tiempos iniciales $t_0 = 0, 1, 2$ y el recorrido de las respectivas trayectorias al transcurrir la primera unidad de tiempo. Tales casos, esenciales para nuestra construcción, son los siguientes:

$$1^\circ) \text{ Si } u = (1, 1) \text{ entonces } x = (t - t_0)(t + y_0)$$

$$y = y_0 + (t - t_0)$$

$$\text{donde } x = \left(y + \frac{t_0 - y_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_0 + y_0}{2}\right)^2$$

es decir, las trayectorias son parabólicas. (Ver Fig. 1).

$$2^\circ) \text{ Si } u = (-1, -1) \text{ entonces } x = (t - t_0)(y_0 - t)$$

$$y = y_0 - (t - t_0)$$

$$\text{de donde } x = -\left(y - \frac{t_0 + y_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{t_0 - y_0}{2}\right)^2$$

es decir, parábolas nuevamente. (Ver Fig. 2).

$$3^\circ) \text{ Si } u = (1, -1) \text{ entonces } x = (t - t_0)(t_0 + y_0)$$

$$y = y_0 - (t - t_0)$$

$$\text{de donde } x = -(t_0 + y_0)y + t_0 y_0 + y_0^2$$

es decir, las trayectorias son rectilíneas. (Ver Fig. 3).

$$4^\circ) \text{ Si } u = (1, 0) \text{ entonces } x = (t - t_0)\left(\frac{t + t_0}{2} + y_0\right)$$

$$y = y_0$$

$$u = (1, 1)$$

Fig. 1

$$u = (-1, -1)$$

Fig. 2

$$u = (1, -1)$$

Fig. 3

$$u = (1, 0)$$

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

es decir, las trayectorias son rectilíneas y paralelas al eje x .
(Ver Fig. 4).

CONSTRUCCION DE TRAYECTORIAS PARA LA CERO-CONTROLABILIDAD.

Si en (1) se restringe el estado del sistema a la franja no acotada $|y| \leq 1$, entonces el problema es transferir al origen un punto (x_0, y_0) de esa restricción en un intervalo de tiempo $[0, T]$ mediante una trayectoria inmersa en la franja.

A tal efecto, y apoyándonos en el anterior esquema de trayectorias, consideremos la solución correspondiente al control $u = (-1, -1)$ que sale de un punto (x_1, y_1) en el tiempo $t_1 \geq 0$ y alcanza al origen en un tiempo $T > t_1$. Es decir si

$$x = x_1 + (t - t_1)(y_1 - t)$$

$$y = y_1 - (t - t_1)$$

entonces de la condición $x(T) = 0 = y(T)$ se obtiene

$$y_1 > 0; T = \frac{x_1}{y_1} + y_1; t_1 = \frac{x_1}{y_1}; x_1 \geq 0.$$

En consecuencia, los puntos $(0, y_1)$ con $y_1 > 0$ pueden transferirse al origen con el control $u = (-1, -1)$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$ donde $T = y_1$.

Si $x_1 > 0$ debe considerarse un tiempo inicial

$$t_1 = \frac{x_1}{y_1} \quad (2)$$

por lo tanto, buscaremos trayectorias que salgan de puntos (x_0, y_0) con

tiempo inicial cero y verifiquen (2) al transcurrir un tiempo t_1 positivo.

Así, de la solución correspondiente al control $u = (1, -1)$

$$x = x_0 + ty_0$$

$$y = y_0 - t$$

se obtiene,

$$t_1 = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x(t_1)}{y(t_1)} = \frac{x_0 + t_1 y_0}{y_0 - t_1} ;$$

$$x_0 + t_1 y_0 > 0; \quad y_0 - t_1 > 0$$

de donde

$$t_1 = \sqrt{-x_0} ; \quad -y_0^2 < x_0 < 0 ; \quad y_0 > 0.$$

Además, los puntos de coordenadas $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ verifican

$$x_1 = -(y_1 - \frac{y_0}{2})^2 + \frac{y_0^2}{4}.$$

Esto indica que los puntos (x_1, y_1) determinan una curva parabólica de cambio de control para cada y_0 . Es decir, las trayectorias que salen de puntos (x_0, y_0) con $-y_0^2 < x_0 < 0$ cambian, al llegar a la parábola mencionada, el control $(1, -1)$ por $(-1, -1)$. (Ver Fig. 5)

Además, de $x(t_1) = 0 = y(t_1)$ se obtiene $-y_0^2 = x_0$;
 $T = t_1 = y_0$ lo cual indica que, desde los puntos (x_0, y_0) ubicados en la parábola $x_0 = -y_0^2$ con $y_0 > 0$, es posible alcanzar el origen directa-

mente.

Se ha solucionado entonces el problema para la región

$$\{(x,y): -y^2 \leq x \leq 0, \quad 0 < y \leq 1\}. \quad (\text{Ver Fig. 5}).$$

De manera análoga se procede para los demás puntos de la restricción de estado. Así, al considerar un punto $(x_1, 1)$, $x_1 < -1$, con tiempo de salida $t_1 \geq 0$ y control $u = (1, -1)$ resulta que la respectiva trayectoria

$$x = x_1 + (t - t_1)(t_1 + 1)$$

$$y = 1 - (t - t_1)$$

verifica $x(T) = 0 = y(T)$ para $T = -x_1$

$$t_1 = -x_1 - 1 > 0. \quad (3)$$

El objetivo es, entonces, determinar trayectorias que salgan de puntos (x_0, y_0) con tiempo inicial cero y verifiquen, en un punto de la frontera superior de la restricción, la relación (3) con

$$x(t_1) = x_1 < -1.$$

Si $x_0 < -1$, $y_0 = 1$, $u = (1, 0)$, entonces la respectiva trayectoria

$$x = x_0 + t\left(\frac{t}{2} + 1\right)$$

$$y = 1$$

cumple los requisitos mencionados para $t_1 = \sqrt{2(1 - x_0)} - 2$ y además

$$x_0 < x_1 = x(t_1). \quad (\text{Ver Fig. 6}).$$

Por otra parte, si $-1 \leq y_0 < 1$, $u = (1,1)$, la respectiva trayectoria

$$x = x_0 + t(t + y_0)$$

$$y = y_0 + t$$

alcanza la frontera superior de la restricción en un punto $(x_2, 1)$ al transcurrir el tiempo $t_2 = 1 - y_0$ y donde $x_2 = x_0 - y_0 + 1$. Entonces, la relación (3), $t_2 = -x_2 - 1$, se verifica si y sólo si $x_0 = 2y_0 - 3$, en cuyo caso además se cumple $x_2 = y_0 - 2 < -1$. (Ver Fig. 6).

En cambio, si $x_0 < 2y_0 - 3$ entonces al llegar la trayectoria a la frontera superior de la restricción, se cambia el control $(1,1)$ por $(1,0)$ y se deja transcurrir el tiempo hasta que se verifique (3). Esto se logra para

$$t_1 = \sqrt{(y_0 - 1)^2 + 2(1 - x_0)} - 2$$

momento en que se cambia el control $(1,0)$ por $(1,-1)$ para alcanzar el origen. (Ver Fig. 6).

Finalmente, para (x_1, y_1) , $0 < y_1 < 1$, $t_1 > 0$, $u = (1,-1)$ se obtiene que la respectiva trayectoria

$$x = x_1 + (t-t_1)(t_1 + y_1)$$

$$y = y_1 - (t-t_1)$$

alcanza el origen para

$$T = -\frac{x_1}{y_1}$$

$$t_1 = -\frac{x_1}{y_1} - y_1 \quad (4)$$

y la búsqueda de trayectorias que salgan de puntos (x_0, y_0) con el tiempo inicial cero y verifiquen (4) al transcurrir un tiempo t_1 positivo, conduce a considerar el control de salida $u = (1,1)$. Es decir,

$$\dot{x} = x_0 + t(t + y_0)$$

$$\dot{y} = y_0 + t$$

la cual verifica (4) para

$$t_1 = \frac{1}{3} (-2y_0 + \sqrt{y_0^2 - 3x_0})$$

y donde

$$2y_0 - 3 < x_0 < -y_0^2 \quad \text{si } 0 \leq y_0 < 1$$

$$2y_0 - 3 < x_0 < 0 \quad \text{si } -1 \leq y_0 < 0.$$

Además, los puntos de coordenadas $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$ verifican

$$x_1 = -2\left(y_1 - \frac{y_0}{4}\right)^2 + \frac{y_0^2}{8};$$

esto último indica que los puntos (x_1, y_1) determinan una curva de cambio parabólica para cada y_0 . (Ver Fig. 7).

El problema ha quedado solucionado para los puntos iniciales ubicados en la región

$$\{(x,y): x < 0, |y| \leq 1\} \cup \{(0,y): 0 < y \leq 1\}.$$

Mediante un proceso de simetría se completa la construcción de trayectorias que llevan al origen cualquier punto (x_0, y_0) de la restricción de estado $|y| \leq 1$ en un intervalo de tiempo finito $[0, T]$ mediante controles admisibles seccionalmente constantes.

OPTIMALIDAD DE LAS TRAYECTORIAS CONSTRUIDAS.

Proposición.

Las trayectorias construidas son optimales en el sentido de alcanzar el origen en tiempo mínimo.

Demostración.

Utilizaremos las condiciones suficientes de Blagodatskikh [2]. Al respecto, consideremos la función multivaluada

$$F(t, x, y) = \{(f_1, f_2): f_1 = y + ta, |a| \leq 1, |f_2| \leq 1\}$$

y el producto interno de un vector $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ con un elemento $f = (f_1, f_2)$ del conjunto anterior, es decir

$$(f, \psi) = (y + ta) \psi_1 + f_2 \psi_2.$$

Para cada conjunto $F = F(t, x, y)$ la correspondiente función soporte

$$C(F(t, x, y), \cdot) = \sup \{(f, \cdot): f \in F\}$$

alcanza, para cada ψ , el valor

(5)

$$C(F(t, x, y), \psi) = y \psi_1 + t |\psi_1| + |\psi_2|.$$

Cada solución $x(t), y(t)$ del sistema (1) con restricción de estado $|y| \leq 1$ y que transfiere el punto (x_0, y_0) al origen en el intervalo de tiempo $[0, T]$ es solución admisible, en el sentido de Blagodatskikh [2], de la inclusión diferencial

$$(\dot{x}, \dot{y}) \in F(t, x, y)$$

Con restricción de estado $X(t) = \{(x, y) : |y| \leq 1\}$, que transfiere el conjunto $M_0 = \{(x_0, y_0)\}$ al conjunto $M_1 = \{(0, 0)\}$.

Usando (5) se obtiene que la inecuación diferencial adjunta

$$\dot{\psi}_1(x-x(t)) + \dot{\psi}_2(y-y(t)) \leq C(F(t, x(t), y(t)), \psi) - C(F(t, x, y), \psi)$$

para $|y| \leq 1$, c.t.p. en $[0, T]$, la condición del máximo

$$\dot{x}(t)\psi_1(t) + \dot{y}(t)\psi_2(t) = C(F(t, x(t), y(t)), \psi(t)) \quad \text{c.t.p. en } [0, T],$$

y la transversalidad fuerte sobre M_1

$$-x(t)\psi_1(t) - y(t)\psi_2(t) > C(M_1 \cap X(t), -\psi(t)) \quad \text{para } t \text{ en } [0, T]$$

se reducen respectivamente a

$$\dot{\psi}_1(x-x(t)) + (\dot{\psi}_2 + \psi_1)(y-y(t)) \leq 0 \quad \text{para } |y| \leq 1, \text{ c.t.p. en } [0, T], \quad (6)$$

$$t(|\psi_1(t)| - v\psi_1(t)) + (|\psi_2(t)| - w\psi_2(t)) = 0 \quad \text{c.t.p. en } [0, T] \quad (7)$$

$$x(t)\psi_1(t) + y(t)\psi_2(t) < 0 \quad \text{para } t \text{ en } [0, T]. \quad (8)$$

Para establecer las condiciones de Blagodatskikh determinaremos para cada trayectoria construida, una solución no trivial de (6) que veri

fique además (7) y (8).

Para las trayectorias que salen de puntos (x_0, y_0) tales que

$$x_0 < 2y_0 - 3; \quad -1 \leq y_0 < 1 \quad \text{se considera}$$

$$\psi_1 = 1 \text{ en } [0, T]; \quad \psi_2 = \begin{cases} -t + t_2 & \text{en } [0, t_2) \\ 0 & \text{en } [t_2, t_1) \\ -t + t_1 & \text{en } [t_1, T]; \end{cases}$$

entonces

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 + \psi_1 = 0 \quad \text{en } [0, T]$$

$$|\dot{\psi}_1(t)| = v \psi_1(t); \quad |\dot{\psi}_2(t)| = w \psi_2(t) \quad \text{para } (v, w) = (1, 1) \text{ en } [0, t_2)$$

$$(v, w) = (1, 0) \text{ en } [t_2, t_1)$$

$$(v, w) = (1, -1) \text{ en } [t_1, T],$$

luego (6) y (7) se cumplen trivialmente.

En cuanto a la transversalidad fuerte, se tiene que en el intervalo $[0, t_2)$

$$x \psi_1 + y \psi_2 = x_0 + (y_0 + t) t_2 = h(t);$$

pero $h'(t) = t_2 > 0$ y $h(t_2) = x_1 < 0$, por lo tanto $h(t) < 0$.

En el intervalo $[t_2, t_1)$

$$x \psi_1 + y \psi_2 = x < 0.$$

Por último en el intervalo $[t_1, T)$

$$x \psi_1 + y \psi_2 = x + y(-t + t_1) < 0$$

con lo cual se verifica (8) en $[0, T)$.

De manera análoga se deduce que las demás trayectorias verifican (6), (7), (8) usando los valores del siguiente listado:

$$- \text{ si } 2y_0 - 3 \leq x_0 < -y_0^2, \quad 0 \leq y_0 < 1$$

$$\text{entonces se considera } \psi_1 = 1, \psi_2 = -t + t_1 \text{ en } [0, T]$$

$$- \text{ si } 2y_0 - 3 \leq x_0 < 0, \quad -1 \leq y_0 < 0$$

$$\text{entonces se considera } \psi_1 = 1, \psi_2 = -t + t_1 \text{ en } [0, T]$$

$$- \text{ si } -y_0^2 \leq x_0 \leq 0, \quad 0 < y \leq 1$$

$$\text{entonces se considera } \psi_1 = 0, \psi_2 = -1 \text{ en } [0, T]$$

$$- \text{ si } x_0 < -1, \quad y_0 = 1$$

$$\text{entonces se considera } \psi_1 = 1$$

$$\psi_2 = \begin{cases} 0 & \text{en } [0, t_1) \\ -t + t_1 & \text{en } [t_1, T]. \end{cases}$$

Finalmente, la condición de transversalidad sobre M_0

$$x_0 \psi_1(0) + y_0 \psi_2(0) = C(M_0 \cap \chi(0), \psi(0)),$$

se verifica de inmediato y las condiciones de salto para ψ , que aparecen en [2], no se producen en este caso debido a su continuidad.

En consecuencia, se cumplen las condiciones suficientes de Blagodatskikh para las trayectorias construidas y, por lo tanto, son óptimas en el sentido de alcanzar el origen en tiempo mínimo.

Por un fácil proceso de simetría se establece la optimalidad de las trayectorias que salen de los demás puntos (x_o, y_o) de la franja $|y| \leq 1$.

REFERENCIAS.

1. Cesari, L., "Optimization Theory and Applications". Springer - Verlag, 1983.
2. Blagodatskikh, V. I., "Sufficient Conditions for Optimality in Problems with State Constraints". Appl. Math. Optim. 7, 1981.
3. Lee, E. B. and L. Markus, "Foundations of Optimal Control Theory". Wiley, 1967.
4. Pontryagin, L. S., et al., "The Mathematical Theory of Optimal Processes". Wiley, 1962.