CONVERGENCIA DE SOLUCIONES DE ECUACIONES
MULTIDIMENSIONALES DE DIFUSION NO LINEAL
A SOLUCIONES DE FRENTE DE ONDA**

E. TUMA*

M. BLAZQUEZ*

RESUMEN.

En este trabajo establecemos el análogo multidimensional de dos teoremas de convergencia de P. Fife y J. B. McLeod para el problema a valor inicial

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad , \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

$$u(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$$

donde $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$.

* Departamento de Matemáticas, Universidad Santa María.

** Financiado por proyecto de Inv. 87.12.07 - U.S.M.

El primer resultado establece que una solución que se asemeja inicialmente a un frente de onda ("travelling front") en alguna dirección, evolucionará uniformemente en tal frente de onda, cuando $t \rightarrow +\infty$, en la misma dirección. El segundo resultado prueba que para condiciones iniciales apropiadas la solución evolucionará en una onda esférica con velocidad constante.

Para su demostración, se obtienen estimaciones a priori que corrigen las dadas por P. Fife [4].

§1 INTRODUCCION.

En este trabajo estudiaremos el problema a valor inicial para la ecuación de difusión no-lineal

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(u) \quad , \quad \vec{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad t > 0 \\ u(\vec{x}, 0) &= g(\vec{x}) \quad , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde Δ denota el laplaciano en $\mathbb{R}^n$ y la función $f \in C^1[0,1]$ satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(0) = f(1) = 0 \\ (ii) \quad & f'(0) < 0 \quad , \quad f'(1) < 0 \\ (iii) \quad & f(u) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < u < \alpha_0 \\ (iv) \quad & f(u) > 0 \quad \text{si} \quad \alpha_1 < u < 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < 1$.

Problemas de este tipo han atraído considerable interés en los

últimos años, en particular el caso unidimensional, ($n = 1$), donde más se conoce acerca del comportamiento asintótico de soluciones y su dependencia de las condiciones iniciales. Los trabajos de Aronson-Weinberger [1,2], Fife [3], Fife-McLeod [5,6] y las referencias ahí citadas contienen muchos de los resultados conocidos hasta ahora.

Análogamente a las referencias citadas, estamos interesados en aquellas circunstancias bajo las cuales la solución $u(\vec{x}, t)$ de (1.1) evoluciona con el tiempo como un frente de onda ("travelling front"). Un frente de onda es una solución de la ecuación diferencial (1.1) de la forma

$$u(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct) \quad (1.3)$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario, arbitrario, en $\mathbb{R}^n$, c es un número real no nulo y

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^n x_j n_j$$

Además $\varphi(z)$ satisface las condiciones $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(+\infty) = 1$. $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)$ es una solución de (1.1) si y solo si $\varphi(z)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi''(z) + c \varphi'(z) + f(\varphi(z)) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Se observa que $\vec{n}$ no aparece en (1.4), luego el estudio de esta ecuación es precisamente el mismo que para el caso unidimensional. En general si consideramos $z = \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{c} \cdot \vec{v}t$ donde $\vec{n}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios arbitrarios en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$, es decir, el frente de onda posee diferentes velocidades dependiendo de la dirección de propagación de la onda, entonces $\varphi(z)$, satisface la ecuación

$$\varphi''(z) + \vec{c} \cdot \vec{v} \varphi'(z) + f(\varphi(z)) = 0$$

Luego, si definimos $c_1 = \vec{c} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$, esta ecuación es equivalente a (1.4), por lo tanto, sin pérdida de generalidad consideraremos que $z = \vec{x} \cdot \vec{n} - ct$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$.

De lo anterior, el problema de encontrar frentes de onda de (1.1) es idéntico al problema de encontrar frentes de onda de

$$u_t = u_{xx} + f(u)$$

La existencia del frente de onda φ y sus propiedades que necesitaremos han sido desarrolladas en [2], [4] y las supondremos conocidas.

En el caso multidimensional $\vec{n}$ puede ser elegido arbitrariamente y consecuentemente la elección $\vec{n} = \pm \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ nos entrega la existencia de frente de onda esféricos, de la forma

$$\varphi(\pm|\vec{x}| - ct).$$

En general, se observa que los resultados obtenidos se deducen fundamentalmente del trabajo en [5]. En forma similar, podemos obtener resultados análogos para la ecuación multidimensional tipo Fisher, es decir, la ecuación (1.1) donde el término no lineal $f(u)$ satisface las propiedades

$$(i) \quad f \in C^1[0,1]$$

$$(ii) \quad f(0) = f(1) = 0 \tag{1.5}$$

$$(iii) \quad f'(0) > 0, \quad f'(1) < 0 \quad \text{y} \quad f(u) > 0 \quad \text{para} \quad \alpha_1 < u < 1$$

para el caso en que la velocidad de propagación c satisface $c^2 > 4f'(0)$. Un estudio completo de esta ecuación, en el caso unidimensional, puede ser encontrado en el excelente trabajo de K. Uchiyama [12] y en las referencias

ahí citadas.

Teoremas análogos a los obtenidos en [5] para la ecuación de Fisher, fueron obtenidos por Rthe [11] y cuya generalizacin a frentes de onda multidimensional se dejan al lector, como un buen ejercicio de comprensin de la generalizacin entregada en este trabajo.

Como en trabajos anteriores nuestro anlisis se basa en la construccin de "super" y "sub" soluciones y argumentos de comparacin. Nuestra herramienta fundamental es la siguiente proposicin de Aronson-Weinberger [2].

PROPOSICION 1.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $u(\vec{x}, t), v(\vec{x}, t)$ funciones acotadas y continuas definidas en $\bar{\Omega} \times [0, T]$ tal que satisfacen la desigualdad

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f(u) \geq \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v - f(v) \quad (1.6)$$

en $\Omega \times [0, T]$. Si $u(\vec{x}, 0) \geq v(\vec{x}, 0)$ en Ω y $u(\vec{x}, t) \geq v(\vec{x}, t)$ en $\partial\Omega \times [0, T]$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Entonces $u \geq v$ en $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Adems, si $u(\vec{x}, 0) > v(\vec{x}, 0)$ en algn subconjunto abierto de Ω , entonces $u > v$ en $\Omega \times (0, T]$.

NOTA: La condicin que u y v sean acotadas es ms fuerte que lo necesario ([2]). Sin embargo, si Ω no es acotado, se requiere una condicin de crecimiento para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.

En este trabajo $\Omega = \mathbb{R}^n$, en vista que $f(0) = f(1) = 0$, $u \equiv 0$ y $u \equiv 1$ son soluciones de (1.1). Luego, si la condicin inicial $g(\vec{x}) \in [0, 1]$ entonces de proposicin 1 se tiene que la solucin $u(\vec{x}, t)$ del problema de valor inicial (1.1) satisface $u(x, t) \in [0, 1]$ y por lo tanto en este caso no se requiere ninguna condicin de crecimiento.

En este trabajo estamos interesados en soluciones de (1.1) con valores en $[0,1]$.

En los siguientes teoremas enunciaremos los resultados de este trabajo, sus demostraciones son desarrolladas en las secciones posteriores.

TEOREMA 1.1.

Suponga que $f(u)$ satisface la condición (1.2) y que existe una solución de frente de onda ("travelling Front") ψ de (1.1) con velocidad de propagación c , sea $g : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ tal que:

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} g(x) < \alpha_0, \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} g(x) > \alpha_1 \quad (1.7)$$

Si $v(\vec{x}, t)$ solución de (1.1) tal que $v(\vec{x}, 0) = g(\vec{x} \cdot \vec{n})$. Entonces existen constantes z_0 , k y w , ($k, w > 0$), tal que la solución $v(\vec{x}, t)$ satisfice

$$|v(\vec{x}, t) - \psi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| < ke^{-wt}.$$

TEOREMA 1.2.

Además de que $f(u)$ satisface (1.2), suponga que

$$\int_0^1 f(u) du > 0, \quad (1.8)$$

la función $g(\vec{x}) \in [0,1]$ y existen constantes positivas L y η tal que $g(\vec{x})$ satisface

$$\limsup_{|\vec{x}| \rightarrow +\infty} g(\vec{x}) < \alpha_0, \quad g(\vec{x}) > \alpha_1 + \eta \text{ si } |\vec{x}| < L \quad (1.9)$$

Entonces para L suficientemente grande ($L = L(\eta, f)$), existen constantes x_0 , k y w ($k, w > 0$) tal que la solución $u(\vec{x}, t)$ de (1.1) con $u(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$ satisface la estimación

$$|u(\vec{x}, t) - \varphi(-|\vec{x}| - ct - x_0)| < ke^{-wt}.$$

El plan de trabajo contempla en §2 obtener estimaciones "a priori", las cuales corrigen las ya obtenidas en [4], que son indispensables para la demostración en §3 del teorema 1.1 y en §4 la del teorema 1.2.

§2. ESTIMACIONES A PRIORI.

En [14] Eidel'man, extiende las estimaciones "a priori" obtenidas por Friedman [7] en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \{0\}$ a $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$, las cuales son esencialmente las mismas y su demostración sigue la línea de [7].

El objetivo de esta sección es corregir algunos de los resultados de [4] y obtener las estimaciones "a priori" necesarias para el desarrollo de las secciones siguientes. Por lo cual restringiremos nuestro trabajo, en esta sección, a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, dejando su extensión a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \cup \{0\}$ al lector.

Consideremos las siguientes notaciones y definiciones

$$Q = (a, b) \times (t_0, T) \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}); \quad -\infty \leq a < b < +\infty, \\ T \leq +\infty, \quad t_0 \geq 0$$

$$S_T = \{(x, t) / x \in (a, b), t \in (t_0, T)\}$$

$$B_{t_0} = \{(x, t) / x \in (a, b), t = t_0\}$$

$$B_T = \{(x, t) / x \in (a, b), t = T\}$$

Es claro que $\partial Q = B_{t_0} \cup \overline{S}_T \cup B_T$. Sea "d" la distancia en Q dada por

$$d(P_1, P_2) = \{(x_1 - x_2)^2 + |t_1 - t_2|\}^{1/2}$$

donde $P_i = (x_i, t_i) \in \overline{Q}$, $i = 1, 2$. Sea u una función a valores reales, en Q y consideremos para $0 < \alpha < 1$

$$|u|_0^Q = : \sup_{P \in Q} |u(P)|; \quad H(u, \alpha, Q) = : \sup_{\substack{P_1, P_2 \in Q \\ P_1 \neq P_2}} \frac{|u(P_1) - u(P_2)|}{d(P_1, P_2)^\alpha}$$

$$|u|_\alpha^Q =: |u|_0^Q + H(u, \alpha, Q); \quad |u|_{1+\alpha}^Q = |u|_\alpha^Q + |u_x|_\alpha^Q;$$

$$|u|_{2+\alpha}^Q =: |u|_{1+\alpha}^Q + |u_t|_\alpha^Q + |u_{xx}|_\alpha^Q; \quad \bullet$$

$$C^{m, \alpha}(Q) =: \{u / |u|_{m+\alpha}^Q < +\infty\}, \quad \text{con } m = 0, 1, 2.$$

Sabemos que ([7]) $C^{m, \alpha}(Q)$ es un espacio de Banach, con la norma $|\cdot|_{m+\alpha}$, y que $C^{0, \alpha}$ es la clase de funciones continuas, en Q , según Holder ($0 < \alpha < 1$) o según Lipschitz ($\alpha = 1$).

Consideremos la ecuación parabólica en Q ,

$$u_t = a_1(x, t)u_{xx} + a_2(x, t)u_x + a_3(x, t)u + f(x, t) \quad (2.1)$$

donde a_i , $i = 1, 2, 3$ y f son funciones continuas en Q , y para algún $\mu > 0$, $a_1(x, t) \geq \mu > 0 \quad \forall (x, t) \in Q$. Sea

$$Q_\delta = \{P \in Q / d(P, R) > \delta, R \in S_T \cup B_{t_0}\}$$

Luego:

$$Q_\delta = (a+\delta, b-\delta) \times (t_0+\delta, T), \text{ con } 0 < \delta < \min \left\{ \frac{b-a}{2}, T-t_0 \right\}$$

Si existe algún $M > 0$ tal que $|a_i(x, t)|_\alpha^{Q_{\delta/2}} < M$, $i = 1, 2, 3$.
Entonces de [8] y [10] tenemos

TEOREMA 2.1. Il'in et. al.

Si $u \in C^{2, \alpha}(\bar{Q})$ es una solución de (2.1) y $f \in C^{0, \alpha}(Q_{\delta/2})$.

Entonces existe una constante $K_1 = K_1(M, \delta, \mu)$ tal que

•

$$|u|_{2+\alpha}^{Q_\delta} \leq K_1 (|u|_0^{Q_{\delta/2}} + |f|_\alpha^{Q_{\delta/2}})$$

TEOREMA 2.2. Oleinik-Kruzhkov.

Si $u \in C^{2, \alpha}(\bar{Q})$ es una solución de (1.) con $f \in C^{0, \alpha}(Q_\delta)$
y $|a_i(x, t)|_\alpha^{Q_\delta} < M$, para algún $M \in \mathbb{R}^+$. Entonces existe una constante
 $K_2 = K_2(M, \mu, \delta)$ tal que

$$|u|_{1+\alpha}^{Q_\delta} \leq K_2 (|u|_0^{Q_\delta} + |f|_0^{Q_\delta})$$

Estos teoremas nos permitirán obtener estimaciones a-priori para la solución de la ecuación

$$u_t = u_{xx} + cu_x + f(u) \quad (2.2)$$

donde c es una constante y $f \in C^{0,1}(I)$, con $I = (-K, K)$ donde K es una constante positiva tal que $|u|_0^Q \leq K$. Poniendo

$$|u|_1^Q = |u|_0^Q + |u_x|_0^Q, \quad |u|_2^Q = |u|_1^Q + |u_{xx}|_0^Q + |u_+|_0^Q$$

se tiene

TEOREMA 2.3.

Sea u cualquier solución de (2.1), luego

$$(I) \quad |u|_2^Q \leq C_1 \{ |u|_0^Q \delta/2 + |f \circ u|_0^Q + H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) \}$$

$$(II) \quad H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) \leq |f' \circ u|_0^Q H(u, \alpha, Q_{\delta/2}) \quad \bullet$$

$$(III) \quad |u|_2^Q \leq C_1 \{ |u|_0^Q \delta/2 + H(u, \alpha, Q_{\delta/2}) |f' \circ u|_0^Q + |f \circ u|_0^Q \}$$

$$(IV) \quad |u|_2^Q \leq C_2 \{ |u|_0^Q + |f \circ u|_0^Q \}$$

$$(V) \quad H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) \leq H(f, 1, I) H(u, \alpha, Q_{\delta/2})$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas.

DEMOSTRACION.

Combinando (I) y (II) se obtiene (III). Por teorema 2.1, y del hecho que $|u|_2^Q \leq |u|_{2+\alpha}^Q$ se tiene (I). La relación (V) sigue de la definición de H , pues

$$\begin{aligned}
H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) &= \sup_{\substack{P_1, P_2 \in Q \\ P_1 \neq P_2}} \frac{|f(u(P_1)) - f(u(P_2))|}{d(u(P_1), u(P_2))} \cdot \frac{|u(P_1) - u(P_2)|}{d(P_1, P_2)^\alpha} \\
&\leq H(f, 1, I) H(u, \alpha, Q_{\delta/2}) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio al lado derecho de (2.3), se tiene para algún z en el segmento $\overline{P_1 P_2}$ o $\overline{P_2 P_1}$, la relación

$$\begin{aligned}
H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) &= \sup_{\substack{P_1, P_2 \in Q_{\delta/2} \\ P_1 \neq P_2}} |f'(u(z))| \frac{|u(P_1) - u(P_2)|}{d(P_1, P_2)^\alpha} \\
&\leq |f' \circ u|_0^{Q_{\delta/2}} H(u, \alpha, Q_{\delta/2}) \\
&\leq |f' \circ u|_0^{Q_{\delta/2}} H(u, \alpha, Q_{\delta/2})
\end{aligned}$$

lo cual prueba la relación (II). Finalmente de (I), (V), y el teorema 2.2 se tiene

$$\begin{aligned}
|u|_2^\delta &\leq C_1 \{ |u|_0^{Q_{\delta/2}} + |f \circ u|_0^{Q_{\delta/2}} + H(f \circ u, \alpha, Q_{\delta/2}) \} \\
&\leq C_1 \{ |u|_0^{Q_{\delta/2}} + |f \circ u|_0^{Q_{\delta/2}} + H(f, 1, I) H(u, \alpha, Q_{\delta/2}) \} \\
&\leq C_1 \{ |u|_0^{Q_{\delta/2}} + |f \circ u|_0^{Q_{\delta/2}} + \\
&\quad + K_2 H(f, 1, I) (|u|_0^{Q_{\delta/2}} + |f \circ u|_0^{Q_{\delta/2}}) \}
\end{aligned}$$

$$= C_1 \{1 + K_2 H(f, 1, I)\} \left\{ |u|_0^Q \delta/2 + |f \circ u|_0^Q \delta/2 \right\}$$

Como $f \in C^{0,1}(I)$, eligiendo $C_2 = C_1(1 + H(f, 1, I)K_2)$ obtenemos (2.3), lo cual prueba el teorema.

De lo anterior, es fácil ver que

$$H(u_{xx}, \alpha, Q_\delta) \quad ; \quad H(u_t, \alpha, Q_\delta) \leq C_2 \left(|u|_0^Q \delta/2 + |f \circ u|_0^Q \delta/2 \right)$$

Estimaciones a-priori como las listadas en el teorema han sido obtenidas por varios autores ([6], [9]), aunque sus resultados contienen algunos errores. Por ejemplo: Fife ([4]) deduce las estimaciones

$$|u|_2^Q \leq C_2 \left(|f' \circ u|_0^Q |u|_1^Q \delta + |u|_0^Q \right) \quad ;$$

$$|u|_2^Q \leq C_2 \left(|f \circ u|_1^Q + |u|_0^Q \right)$$

(ver [4], fórmulas 4.4b y 4.2b). En esta segunda relación, el autor considero $|f \circ u|_1^Q$ la cual mide la variación de $f \circ u$ en la dirección de las x , mientras en las estimaciones obtenidas por Friedman ([7]) el término correspondiente es $H(f \circ u, \alpha, Q)$, la cual también mide la continuidad en la dirección de t . Las expresiones correctas están dadas por (I) y (IV) respectivamente. Análogamente, teorema 2.3 corrige las estimaciones obtenidas en [5] y [13].

NOTA. Una consecuencia del teorema 2.3 y del comportamiento del frente de onda $\varphi(z)$ para $z \rightarrow \pm \infty$, es el siguiente teorema, cuya demostración es análoga al Lema 4.3 de [5].

TEOREMA 2.4.

Con las hipótesis del teorema 1.1, existen constantes positivas σ, μ y C con $\sigma > |c|/2$ tal que

$$|v(\vec{x}, t)|, |\nabla v(\vec{x}, t)|, |\Delta v(\vec{x}, t)|,$$

$$|v_t(\vec{x}, t)| < C(e^{(\frac{\sigma-c}{2})(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)} + e^{-\mu t}), \quad \vec{x} \cdot \vec{n} - ct < 0, \quad t > 0$$

$$|1 - v(\vec{x}, t)|, |\nabla v(\vec{x}, t)|, |\Delta v(\vec{x}, t)|, |v_t(\vec{x}, t)| <$$

$$C(e^{-(\sigma+c/2)(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)} + e^{-\mu t}); \quad \vec{x} \cdot \vec{n} - ct > 0, \quad t > 0$$

•

3. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1.

Demostraremos el teorema (1.1) a través del uso de una serie de lemas.

LEMA 3.1.

Suponga que $f(u)$ satisface la hipótesis (1.2) y que existe un frente de onda $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)$, con velocidad de propagación c , que se propaga en la dirección del vector unitario $\vec{n}$. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que (1.7) se cumple y $v(\vec{x}, t)$ solución de (1.1) que satisface la condición inicial $v(\vec{x}, 0) = g(\vec{x} \cdot \vec{n})$. Entonces existen constantes z_1, z_2, q_0, μ ($q_0, \mu > 0$) tal que

$$\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_1) - q_0 e^{-\mu t} \leq v(\vec{x}, t) \leq \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2) + q_0 e^{-\mu t}$$

La demostración de este lema sigue del lema 4.1 de [5], sólo con modificaciones menores y por lo tanto no necesita ser repetida aquí.

Bajo las condiciones del Lema 3.1, podemos deducir la estabilidad C^0 de φ , es decir, si la condición inicial $g(\vec{x} \cdot \vec{n})$ es "cercana" a $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - z_0)$ entonces la solución $v(\vec{x}, t)$ de (1.1) es "cercana" al frente de onda $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)$, como se observa en el siguiente resultado.

LEMA 3.2.

Bajo las condiciones del Lema 3.1 existe una función $\omega(\varepsilon)$, definida para $\varepsilon > 0$ pequeño, tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = 0$ con la propiedad que si $0 \leq g(\vec{x} \cdot \vec{n}) \leq 1$ y $|g(\vec{x} \cdot \vec{n}) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - z_0)| < \varepsilon$ para algún z_0 . Entonces

$$|v(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| < \omega(\varepsilon)$$

para toda $\vec{x} \cdot \vec{n} \in (-\infty, +\infty)$ y todo $t > 0$.

LEMA 3.3.

Bajo las hipótesis del Lema 3.1 existe una constante z_0 tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| = 0$$

uniformemente en x .

DEMOSTRACION.

Para demostrar este Lema hacemos uso de las estimaciones "a

priori" para soluciones de ecuaciones parabólicas dadas en el teorema 2.4. Estas estimaciones para u , u_t , ∇u , todas decaen al menos exponencialmente en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Sea $w(\vec{x}, t)$ la truncación de $u(\vec{x}, t)$ en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} w(\vec{x}, t) &= u(\vec{x}, t) && \text{si } |\vec{x} \cdot \vec{n} - ct| \leq \epsilon t \\ &= 0 && \text{si } \vec{x} \cdot \vec{n} - ct \leq -\epsilon t - 1 \\ &= 1 && \text{si } \vec{x} \cdot \vec{n} - ct \geq \epsilon t + 1 \end{aligned}$$

donde $w(\vec{x}, t)$ satisface estimaciones análogas a las del teorema 2.4.

Definamos la función de Lyapunov

$$V[w] =: \iint_{\mathbb{R}^n} e^{c(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla w)^2 - F(w) + H(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct) F(1) \right\} dx$$

donde $H(\cdot)$ es la función de Heaviside y $F(w) = \int_0^w f(s) ds$.

Sea $y_i = x_i - p_i t$, $i = 1, 2, \dots, n$ donde $\vec{p}$ es un vector tal que $\vec{p} \cdot \vec{n} = C$.

Luego

$$V[w] = \iint_{\mathbb{R}^n} e^{c\vec{x} \cdot \vec{n}} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla w)^2 - F(w) + H(\vec{y} \cdot \vec{n}) F(1) \right\} d\vec{y} \quad (3.3)$$

de donde, al usar las estimaciones "a-priori" se tiene

$$|V[w]| \leq C_1 \iint_{-\epsilon t - 1 \leq \vec{y} \cdot \vec{n} \leq \epsilon t + 1} e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} e^{-c\vec{y} \cdot \vec{n} - 2\sigma|\vec{y}|} + e^{-2\mu t} d\vec{y}$$

$$= C_1 \iint_{-\epsilon t - 1 \leq \vec{y} \cdot \vec{n} \leq \epsilon t + 1} \{e^{-2\sigma|y|} + e^{c\vec{y} \cdot \vec{n} - 2\mu^t}\} d\vec{y}$$

donde $\sigma > 0$ y $\epsilon|c| < 2\mu$. Por lo tanto $V[\omega]$ es acotada para todo tiempo.

Escribiendo $V(t) = V[\omega(\cdot, t)]$ y considerando cada componente de (3.3) e integrando por partes, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{\Delta t} &= \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \\ &= - \sum_{i=1}^n \iint_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} \{(\omega_{y_i}(\vec{y}, t) + \omega_{y_i}(\vec{y}, t+\Delta t))_{y_i} \times \\ &\quad \times \frac{\Delta \omega}{\Delta t} + \frac{F(\omega)}{\Delta t}\} d\vec{y} \end{aligned}$$

haciendo $\Delta t \rightarrow 0$ se tiene

$$\dot{V}(t) = - \iint_{\mathbb{R}^n} \{e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} \Delta \omega + e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} f(\omega)\} \omega_t d\vec{y}$$

definiendo

$$Q[\omega](t) = \iint_{\mathbb{R}^n} e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} \{\Delta \omega + f(\omega)\}^2 d\vec{y}$$

se obtiene

$$\dot{V}(t) + Q[\omega](t) = - \iint_{\mathbb{R}^n} e^{c\vec{y} \cdot \vec{n}} [\Delta \omega + f(\omega)][\Delta \omega + f(\omega) - \omega_t] d\vec{y}$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad |\vec{y} \cdot \vec{n}| \leq \varepsilon t.$$

Como $\omega(\vec{y}, t)$ satisface las estimaciones del teorema 2.4, encontramos que:

$$|\dot{V}(t) + Q[\omega](t)| \leq C_2(e^{-2\sigma\varepsilon t} + e^{(\varepsilon|c| - 2\mu)t})$$

y como $\varepsilon|c| - 2\mu < 0$ se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\dot{V}(t) + Q[\omega](t)| = 0$$

Como $Q[\omega] \geq 0$, entonces $\lim_t \dot{V}(t) \leq 0$, luego existe una sucesión $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{V}(t_n) = 0$, pues en caso contrario $\limsup_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) < 0$ de donde $V(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$, lo cual contradice que $V(t)$ es acotada. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} Q[\omega](t_n) = 0$.

Por otro lado, haciendo uso de las estimaciones "a priori", se tiene que el conjunto $\{\omega(\cdot, t)/t \geq 0 \subseteq C^2(\mathbb{R}^n)$ es relativamente acotado, luego existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $\omega(\cdot, t_n)$ converge en $C^2(\mathbb{R}^n)$ a una función $\tilde{V}(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct_n)$. De donde $\tilde{V}(-\infty) = 0$, $\tilde{V}(+\infty) = 1$ y por Lema 3.2 y la unicidad del frente de onda obtenemos el resultado buscado.

Demostraremos ahora el teorema (1.1).

Definamos la función

$$h(\vec{x}, t) = \omega(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0 + \alpha(t))$$

donde z_0 es la constante que aparece en el enunciado del Lema 2.3 y $\alpha(t)$ se elige de modo que para t grande, h es ortogonal a $e^{c(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)} \varphi$, es decir

$$\iint_{\mathbb{R}^n} e^{c(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct)} h(\vec{x}, t) \varphi'(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0 - \alpha(t)) d\vec{x} = 0 \quad (3.4)$$

La existencia de $\alpha(t)$, con $\alpha(+\infty) = 0$, sigue del Teorema de la Función Implícita, pues del Lema 3.3 y las estimaciones "a-priori", que en $\alpha = 0$, $t = \infty$. Más aún la derivada del lado izquierdo de (3.4) con respecto a α es continua, y es no nula en $\alpha = 0$, $t = \infty$. El Teorema de la Función Implícita también prueba que α es continuamente diferenciable. Siguiendo la misma línea de demostración que en [5], podemos demostrar que:

$$(i) \quad |h(\vec{x}, t)| < ce^{-vt} \quad (ii) \quad |\alpha(t)| < ce^{-vt}$$

De donde vemos que $\omega(\vec{x}, t)$ converge exponencialmente a $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)$ y de la definición de $\omega(\vec{x}, t)$ deducimos que $|\omega(\vec{x}, t) - v(\vec{x}, t)| < ce^{-vt}$, para algún $v > 0$. Por lo tanto hemos probado que $v(\vec{x}, t)$ converge exponencialmente a $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)$, que prueba el teorema 1.1.

§4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.2

El lema básico requerido para la demostración del teorema 1.2 es

LEMA 4.1.

Si f satisface (1.2) y además supongamos que

$$\int_0^1 f(u) du > 0 \quad (4.1)$$

Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\limsup_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} g(\vec{x}) < \alpha_0, \quad g(\vec{x}) > \alpha_1 + \eta \text{ si } |\vec{x}| < L \quad (4.2)$$

donde η y L son constantes positivas. Entonces existen constantes

$z_1, z_2, q_0 > 0, \mu > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(|\vec{x}| - ct - z_1) + \varphi(-|\vec{x}| - ct - z_0) - 1 - q_0 e^{-\mu t} \leq u(\vec{x}, t) \leq \\ \leq \varphi(|\vec{x}| - ct - z_2) + \varphi(-|\vec{x}| - ct - z_2) - 1 + q_0 e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (4.3)$$

DEMOSTRACION.

Recordar que $u(\vec{x}, t)$ es la solución de (1.1) tal que $u(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$ definida por (4.2). Sea $v(\vec{x}, t)$ otra solución de (1.1) tal que $v(\vec{x}, 0) = \tilde{g}(\vec{x} \cdot \vec{n})$ donde $\tilde{g}$ se elige de modo que $g(\vec{x}) \leq \tilde{g}(\vec{x} \cdot \vec{n})$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y cualquier vector unitario $\vec{n}$. El acotamiento de g y las condiciones (4.2) permiten esta construcción.

De la proposición 1, se tiene que $u(\vec{x}, t) \leq v(\vec{x}, t)$. Más aún, si $\tilde{g}$ satisface las condiciones del Lema 3.1, entonces se tiene

$$v(\vec{x}, t) \leq \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2) + q_1 e^{-\mu_0 t} \quad (4.4)$$

para algún z_2, q_1 y μ_0 . Note que la condición (4.1) implica $c < 0$.

Sea $w(\vec{x}, t)$ solución de (1.1) tal que $w(\vec{x}, 0) = \tilde{g}(-\vec{x} \cdot \vec{n})$ donde $\tilde{g}$ satisface las condiciones del Lema (2.1) y $g(\vec{x}) \leq \tilde{g}(-\vec{x} \cdot \vec{n})$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Nuevamente, haciendo uso de la Proposición 1 y del Lema 2.1, se obtiene

$$w(\vec{x}, t) \leq \varphi(-\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2^1) + q_1^1 e^{-\mu_0^1 t} \quad (4.5)$$

para algún z_2^1, q_1^1 y μ_0^1 .

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir $z_2 = z_2^1 < 0$, $q_1 = q_1^1$, pues para valores más pequeños de z_2, z_2^1 y más grandes de q_1, q_1^1 los des

igualdades (4.4) y (4.5) siguen siendo válidas. Luego

$$u(\vec{x}, t) \leq \text{Min} \{ \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2), \varphi(-\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2) \} + q_1 e^{-\mu_0 t} \quad (4.6)$$

Luego, procediendo en la misma línea de [5, Lema 6.1], existen constantes $z_1, z_2, q_0 > 0, \mu > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_1) + \varphi(-\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_1) - 1 - q_0 e^{-\mu t} &\leq u(\vec{x}, t) \leq \\ &\leq \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2) + \varphi(-\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_2) - 1 + q_0 e^{-\mu t} \end{aligned}$$

Finalmente, como $\vec{n}$ es arbitrario, elegimos $\vec{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$, lo cual demuestra el Lema.

Como en el Lema 3.2 establecimos la estabilidad C^0 al frente de onda $\varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)$, luego el Lema 4.1 puede ser usado para probar la estabilidad C^0 a un par de frentes de ondas divergentes. Este es el contenido del siguiente lema.

LEMA 4.2.

Si f y g satisfacen las hipótesis del teorema 1.2. Luego existen funciones $\omega(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$ definidas para $\varepsilon > 0$ pequeño, tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = 0$, de modo que si $|u(\vec{x}, t_0) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct_0 - x_0)| < \varepsilon$ para algún x_0 y $t_0 > T(\varepsilon)$, $\forall \vec{x} \cdot \vec{n} < 0$. Entonces

$$|u(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - x_0)| < \omega(\varepsilon) \quad , \quad \forall t > t_0, \vec{x} \cdot \vec{n} < 0$$

DEMOSTRACION.

La demostración de este resultado será omitida, pues su demostración es análoga a la demostración del Lema 6.2 de [5] y, se puede tomar co

mo subsolución a

$$\underline{u}(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - J(t)) - q_0 e^{-\mu t}$$

donde $J = J_1 + J_2 e^{-\mu t}$.

Volviendo a la demostración del Teorema 1.2 definamos la truncación:

$$u_\ell(\vec{x}, t) = \begin{cases} u(\vec{x}, t) & , \quad \text{si } \vec{x} \cdot \vec{n} < 0 \\ 1 - J(\vec{x})(1 - u(\vec{x}, t)), & \text{si } \vec{x} \cdot \vec{n} > 0 \end{cases}$$

donde $J(\vec{x}) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $J(\vec{x}) = 1$ si $\vec{x} \cdot \vec{n} < 0$ y $J(\vec{x}) = 0$ si $\vec{x} \cdot \vec{n} > 0$. •

Luego, en forma análoga a la demostración del Lema 3.3, existe una constante z_0 tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_\ell(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| = 0$$

uniformemente en $\vec{x}$. Podemos extender la demostración del Teorema 1.2, para probar que para $\vec{x} \cdot \vec{n} < 0$

$$|u_\ell(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| \leq k e^{-\omega t}$$

es decir,

$$|u(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| \leq k e^{-\omega t}$$

con el mismo argumento, en forma simétrica, se tendrá

$$|u(\vec{x}, t) - \varphi(\vec{x} \cdot \vec{n} - ct - z_0)| \leq ke^{-\omega t}$$

si $\vec{x} \cdot \vec{n} > 0$. Luego tomando $\vec{n} = \pm \vec{x} / |\vec{x}|$ completamos la demostración del teorema.

REFERENCIAS.

- [1] D. G. Aronson, H. F. Weinberger. Non linear diffusion combustion, and nerve propagation, in partial differential equations and related topics. Ed. J. A. Goldstein Lecture Notes in Mathematics 446, 5-49, New York, Springer (1975).
- [2] D. G. Aronson, H. F. Weinberger. Multidimensional no-linear diffusion arising in population genetics. Advances in Math. 30, 33-76, (1978).
- [3] P. C. Fife. Long time behaviour of solutions of bistable non-linear diffusion equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 70, 31-46, (1979).
- [4] P. C. Fife. Math. Aspects of Reacting an Diffusing Systems. Lecture Notes in Biomathematics 28, Springer (1979).
- [5] P. C. Fife, J. B. McLeod. The approach of solutions of non-linear diffusion equations to travelling front solutions. Arch. Rat. Mech. Anal. 65, 335-361, (1977).

- [6] P. C. Fife, J. B. McLeod. A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for non-linear diffusion. M. R. C. Technical Summary Report № 1986 (1978).
- [7] A. Friedman. Partial Differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N. J. 1964.
- [8] A. Il'in, A. Kalashnikov, O. Oleinik. Linear equations of the second order of parabolic type Russian Math. Il'in survey 17, 1-143 (1963).
- [9] G. Klaasen, W. Troy. The stability of travelling wave front solutions of a reaction diffusion system. Siam J. Appl. Math., 41, 145-167, (1981).
- [10] O. Oleinik, S. N. Kruzhkov. Quasi-linear second order parabolic equations with many independent variables, Russian Math. Survey 16, 105-146 (1961).
- [11] F. Röthe. Convergence to pushed fronts, Rocky Mountain, Journal of Math. Vol. 11, № 4, 617-633, (1981).
- [12] K. Uchiyama. The behaviour of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time. J. Math. of Kyoto Univ. 18, 453-508, (1978).
- [13] E. J. M. Veling. Travelling waves in an initial boundary value problem. Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 90A, 41-61, (1981).
- [14] S. D. Eidel'man. Parabolic Systems, John Wiley & Sons Inc. (1969).