BASES CANONICAS DE HOMOLOGIAS Y MATRICES DE RIEMANN

GUSTAVO LABBE MORALES*

Dentro de la geometría compleja, siempre ha habido gran interés el poder clasificar las superficies de Riemann. Por ejemplo, para las superficies de Riemann simplemente conexas X , se tiene la clasificación vía equivalencia conforme la cual establece que existen sólo tres clases, que son $X \cong \mathbb{C}$; $X \cong \mathbb{C}^*$ ó $X \cong \mathbb{D}$.

Si cambiamos la hipótesis de simplemente conexa por compacto y conexo tenemos la clasificación vía equivalencia topológica cuyas clases están caracterizadas por el género g de la superficie, esto es, esferas con g asas.

Para clasificar superficies de Riemann compactas y conexas conformemente, introduciremos un invariante de la superficie, el cual juega un rol muy importante para tal objetivo.

* Departamento de Matemática - Universidad Arturo Prat - Chile.

Aprovechemos inmediatamente en dejar establecido que cada vez que consideremos una superficie de Riemann, nos estaremos refiriendo a una superficie de Riemann compacta y conexa, salvo que especifiquemos otra característica topológica de la superficie.

Si la superficie de Riemann X es de género g , este invariante, llamada "matriz período", es de la forma: $\Pi = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$, donde $A, B \in M(g \times g, \mathbb{C})$, $\det A \neq 0$ que en la forma:

$\begin{pmatrix} I & Z \end{pmatrix}$ se dice "normalizada" con $Z = A^{-1}B$ simétrica con parte imaginaria definida positiva, llamada "matriz de Riemann".

La relación e interés de las matrices períodos de diferentes superficies de Riemann las establece el siguiente teorema.

Teorema (Torelli)

Sean X y X' superficies de Riemann con matrices períodos normalizados $\Pi = \begin{pmatrix} I & Z \end{pmatrix}$ y $\Pi' = \begin{pmatrix} I & Z' \end{pmatrix}$ respectivamente. Si existe N matriz simpléctica tal que Z' es obtenida normalizando ΠN , entonces X y X' son conformemente equivalentes.

El concepto de matriz simpléctica, será aclarado más adelante cuando veamos bases canónicas de homologías.

Nuestro interés se reduce por lo tanto a calcular los elementos de la matriz período.

Si denotamos por un momento la matriz período por $\Pi = (\Pi_{ij})$ entonces $\Pi_{ij} = \int_{\alpha_j} du_i$ donde $du = \{du_1, \dots, du_g\}$ es una base de diferenciales abelianas de primera especie y $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ base de homología canónica de la superficie X .

El objetivo central de este trabajo es presentar un algoritmo que permite calcular de manera fácil bases de homología.

Si la matriz período es obtenida con respecto a una base de diferenciales de primera especie du y una base de homología no canónica c y si H y T son matrices de cambio de base a las bases dv y α , es decir:

$$dv = H du \quad \text{y} \quad \alpha = T c$$

entonces la matriz período con respecto a las bases dv y α está dada por:

$$H \Pi T.$$

Luego podemos observar que normalizar una matriz período no es otra cosa que hacer un cambio de base de diferenciales, esto es, si $\Pi = (A \ B)$ es obtenida con respecto a la base du , haciendo el cambio de base: $dv = A^{-1} du$ obtenemos la matriz período con respecto a la base dv dada por:

$$A^{-1} \Pi = A^{-1} (A \ B) = (A^{-1} A \ A^{-1} B) = (I \ Z)$$

También observemos que hasta tener cualquier base de homología y la matriz de cambio de base T a la base canónica de homología.

A continuación veamos lo que se entiende por una base canónica de homología.

Centremos nuestra atención en una superficie de género 3 con la siguiente base de homología:

Fig. 1

Dada cualquier base de homología c , le podemos asociar una matriz, llamada matriz intersección $K = (k_{ij})_{2g \times 2g}$ donde $k_{ij} = c_i c_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ donde el símbolo $c_i \cdot c_j$ representa la intersección de los caminos c_i y c_j donde se ha preestablecido una orientación tanto a los caminos como a la superficie. Si la intersección de c_i con c_j es en el sentido positivo, $k_{ij} = 1$, si es en el sentido negativo, $k_{ij} = -1$ y $k_{ij} = 0$ si no se interseca, como también $k_{ii} = 0$. Luego se tiene que $k_{ij} = -k_{ji}$ y así K es antisimétrica.

Por ejemplo en la Figura 1, considerando la superficie con la orientación positiva inducida por $\mathbb{R}$, a la base le corresponde la matriz intersección:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_{3 \times 3} \\ -I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \det J = 1$$

Las bases de homología con matriz intersección J se llaman canónicas.

Además, cualquier otra base de homología se obtiene a partir de ésta por adecuadas combinaciones. Luego dada cualquier base de homología con matriz intersección K , existe una matriz T unimodular tal que

$T^t K T = J$ donde $T = E_{i_1 j_1} \dots E_{i_s j_s}$ con $E_{i_r j_r}$ operaciones elementales de columna. Esto es, T es la matriz de cambio de base a la base canónica. Además, como $\det E_{i_r j_r} = \pm 1$ se tiene que $\det T = \pm 1$, por lo tanto $\det K = \det J = 1$.

En resumen, a una base de homología c se le asocia una matriz K con $\det K = 1$.

El recíproco también vale, es decir, si una colección de $2g$ curvas sobre X tiene matriz intersección K con $\det K = 1$ entonces ellas for-

man una base de homología de X .

Por último, una matriz N se llama simpléctica cuando: $N^t J N = J$. Es decir, la matriz N hace una reenumeración (o reordenación) de la base canónica de homología.

Ahora procederemos a construir superficies de Riemann a partir de ecuaciones algebraicas. Esto es, la superficie de Riemann será el dominio de definición de una función meroforma n -valuada.

Remitirnos a este tipo de superficies no es restrictivo, pues se tiene el resultado que toda superficie de Riemann compacta admite al menos una tal representación.

Consideremos la curva de Klein-Hurwitz:

$$w^7 = z(1 - z)^2$$

Observemos que $\forall z \in Z = \mathbb{C} - \{b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = \infty\}$

$$w = \sqrt[7]{z(1-z)^2}$$

tiene exactamente 7 soluciones. Los puntos b_i , $i = 1, 2, 3$ se denominan puntos de ramificación.

Luego para pensar en w como función de z necesitamos tener repetido 7 veces cada $z \in Z$. Para este efecto, tomemos la esfera de Riemann, distinguiendo un punto $a = 1/2$ y caminos γ_i , $i = 1, 2, 3$ como indica la Figura 2.

Fig. 2

A continuación tomemos 7 copias de la esfera cortadas a través de los caminos l_i

Fig. 3

Ahora debemos pegar estas 7 copias de tal forma que los puntos 0, 1 e ∞ sean un sólo punto. Para este, notemos que al hacer un giro en 2π alrededor de b_1 por el camino cerrado γ_1 sin encerrar los demás puntos de ramificación, el efecto que produce sobre w es pasar de un valor de la raíz a la siguiente y esto quiere decir que pegamos la copia j con la copia $j+1$

$(j \bmod 7)$. Esto nos da una permutación con respecto a b_1 que es $\pi_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) = \sigma$. Al hacer el mismo razonamiento alrededor de b_2 , resulta que como $1-z$ está elevado a 2 el giro en 2π alrededor de b_2 se duplica y el efecto que produce sobre w es pasar de un valor de la raíz al subsiguiente, esto nos da la permutación $\pi_2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6) = \sigma$. Para ver la permutación con respecto a $b_3 = \infty$ observemos lo siguiente. Si queremos que las 7 copias queden bien pegadas necesitamos que el producto de todas las permutaciones relativas a los puntos de ramificación sea la identidad, luego, $\pi_3 = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4) = \sigma^4$. Otra forma es vía parámetro local: $z = \frac{1}{t}$ de donde obtenemos $w = \sqrt[7]{t^{-3}(t-1)^4}$ y luego al hacer un giro alrededor de $t = 0$ en un ángulo de 2π obtenemos -6π produciendo el efecto sobre w de pasar de un valor de la raíz al tercero pero en sentido contrario y

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_3^{-1}$$

esto se reduce a pegar una copia con la cuarta siguiente, es decir, obtenemos la permutación $\Pi_3 = \sigma^4$.

Observemos que hemos obtenido un cubrimiento ramificado de 7 hojas y 3 puntos de ramificación de la esfera de Riemann.

$$p : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

donde la superficie X obtenida es de género 3.

Los datos: a, b_i, l_i, Π_i se denomina sistema de Hurwitz.

Denotando por D el interior del hexágono obtenido de la Fig. 2 que es homeomorfa a una 2-célula, tenemos que: $p^{-1}(D) = D_1 \cup \dots \cup D_7$ (unión disjunta) y $p^{-1}(a) = \{a_1, \dots, a_7\} = \{1, \dots, 7\}$

El sistema de Hurwitz permite hacer una descomposición celular de la superficie X y por medio de esta descomposición obtener una base de homología. La descomposición celular viene dada por:

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^7 p^{-1}(l_i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^7 D_j \right)$$

que geométicamente es:

Fig. 4

Notemos que este polígono regular no está dado en la forma canónica. Para encontrar base de homología procedemos de la siguiente manera. Consideremos un árbol maximal T del 1-esqueleto $\Gamma = \bigcup p^{-1}(1_i)$ y contraemos a un vértice obteniendo un buquet de 12 pétalos o ciclos c_i correspondiendo a los lados e_i que no están en el árbol (ver Fig. 4).

Estos 12 ciclos forman una base de homología de Γ los cuales contienen una base de homología de X . Ahora consideremos una vecindad abierta U de T y establecemos un homeomorfismo preservando orientación sobre el disco, y observando que la frontera de U interseca en exactamente dos puntos a cada e_i (p_i, q_i) obtenemos la Fig. 5 donde la imagen de p_i es P_i y la de q_i es Q_i . De aquí obtenemos una matriz intersección $K_{12 \times 12}$ de los ciclos c_i 's.

Luego una forma de obtener base de homología para X , pero muy poco razonable, sería buscar submatriz de 6×6 de K con determinante 1.

Veamos un método que permite eliminar los ciclos c_i 's que están demás. Observando que:

$\partial \bar{D}_1 + \dots + \partial \bar{D}_7 = 0$ y que cada e_i aparece exactamente en 2 ecuaciones.

$$\partial \bar{D}_j = 0 \quad j = 1, \dots, 7$$

una vez con coeficiente positivo y una vez con coeficiente negativo, podemos formar la matriz 7×12 de los coeficientes de los e_i , y realizando adecuadas sumas de filas podemos anular una de ellos y distinguir 6 columnas en las cuales aparece un 1 y el resto 0, correspondiendo al coeficien

Fig. 5

te 1 está algún e_i .

Eliminando estos e_i y sus correspondientes c_i obtenemos 6 ciclos c_j con matriz intersección $K_{6 \times 6}$ submatriz de $\hat{K}$ con $\det K = 1$ y luego base de homología para X .

$$\begin{matrix} / \partial \bar{D}_1 \\ \vdots \\ \partial \bar{D}_7 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & -1 & \dots & \boxed{0} & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & & & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & & 1 & & 0 \end{pmatrix} \quad 7 \times 12$$

Basado en esta forma de obtener bases de homología, veremos un algoritmo que permite obtener fácilmente bases de homología utilizando el sistema de Hurwitz, que no es otra cosa, que establecer un homeomorfismo preservando orientación de la Fig. 4.

Comenzamos tomando el punto 1 de $p^{-1}(a)$ y consideramos un círculo R_1 centrado en 1. Ubicamos en este círculo los tres puntos de ramificación y unimos el 1 con los puntos de ramificación por medio de segmentos de rectas orientados partiendo de 1 y respetando también la orientación de los puntos de ramificación. Denotemos los puntos finales de estos segmentos por $c_j(1)$, $j = 1, 2, 3$. Ahora consideremos un segundo círculo R_2 concéntrico a R_1 de radio mayor. Notemos que cada punto de ramificación tiene 7 entradas, una por cada punto de $p^{-1}(a)$. Luego en R_2 ubicamos por cada punto de ramificación 6 puntos (luego en total 18 puntos) ya que fue considerada una entrada por cada punto de ramificación (la que partía del punto 1). Unimos estos puntos a los correspondientes puntos de ramificación por segmentos dirigidos terminando en los puntos de ramificación y enumeramos los puntos sobre R_2 según la permutación correspondiente al punto de ramificación. Tomemos un tercer ciclo R_3 concéntrico a los anteriores y de radio mayor al del R_2 . Como sobre R_2 están ubicados los puntos de $p^{-1}(a)$ y estos tienen 3 salidas, una para cada punto de ramificación y ya está considerada una de estas salidas, ubicamos por cada uno

Al igual que antes tomamos un árbol maximal de vértices T' y una vecindad abierta U' del árbol maximal orientada positivamente. Observemos nuevamente que quedan 12 lados del 1-esqueleto que no están en el árbol T' y la frontera de U' intersecta a estos lados en solamente dos puntos. Ahora por cada uno de los vértices de $p^{-1}(a)$ que se encuentran en $R_2 \cap U'$, eliminamos uno de los segmentos que partan de ellos, quedandonos seis segmentos. Establecemos nuevamente un homeomorfismo preservando orientación de U' sobre el disco obteniendo una matriz intersección.

$K_{6 \times 6}$ con $\det K = 1$ y luego base de homología de X .

Además podemos encontrar T unimodular tal que

$$T^t K T = J \quad \text{donde}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la base de homología $c = \{c_1, \dots, c_6\}$ dada por este algoritmo es el de la Figura 7.

Fig. 7

Teniendo la base de homología y la matriz T de cambio de base c a la base canónica, procedemos a buscar una base de diferenciales abelianas de primera especie para calcular la matriz período.

En general, si la superficie está dada por la ecuación

$$F(z, w) = 0$$

los diferenciales son de la forma

$$du_j = \frac{Q_j(z, w)}{\frac{\partial F}{\partial w}} dz, \quad j = 1, \dots, g$$

donde Q_j son polinomios linealmente independiente con $\text{grad } (Q_j) \leq n - 3$.
Luego los diferenciales son de la forma

$$du_j = \frac{Q_j(z, w)}{w^6} dz$$

Como estas deben ser analíticas en X y en $w = 0$ estaría produciendo un polo, necesitamos que Q_j se anule cuando $w = 0$, y esto ocurre cuando $z = 0$, $z = 1$. Por lo tanto:

$$du_j = \frac{z^a (1-z)^b w^c}{w^6} dz = \frac{z^a (1-z)^b}{w^{6-c}}$$

con $a + b + c \leq 4$.

Ahora usamos parámetros locales para obtener condiciones sobre a , b y c de modo que du_j no tenga polo en $w = 0$.

$$i) \ z = 0, \ z = t^7, \ dz = 7t^6 dt, \ w = t(1-t^7)^{2/7}$$

$$ii) \ z = 1, \ 1-z = t^7, \ dz = -7t^6 dt, \ w = (1-t^7)^{1/7} \cdot t^2$$

$$iii) \ t = \infty, \ z = \frac{1}{t^7}, \ dz = \frac{-7}{t^8} dt, \ w = \frac{1}{t^3}(t^7-1)^{2/7}$$

Sustituyendo en du_j obtenemos las condiciones:

$$i') \ 7a + c \geq 0$$

$$ii') \ 7b + 2c - 6 \geq 0$$

$$iii') \ -7a - 7b - 3c + 10 \geq 0$$

Satisfaciéndose con los valores:

$$a = 0, \ b = 1, \ c = 0 \Rightarrow du_j = \frac{(1-z)}{w^6} dz$$

$$a = 0, b = 1, c = 1 \Rightarrow du_2 = \frac{(1-z)}{w^5} dz$$

$$a = 0, b = 0, c = 3 \Rightarrow du_3 = \frac{dz}{w^3}$$

Ahora las 7 soluciones de $w^7 = z(1-z)^2$ en potencias de $z^{-1/2}$ las denotamos por $w_k = w_k(z)$, $1 \leq k \leq 7$ e identificadas con $a_k \in X$.

Además cada una de éstas es obtenida de cualquier otra multiplicada por una adecuada potencia de $\xi = e^{2\pi i/7}$ (factor de cambio de hoja). Así, podemos asumir que

$$w_k = \xi^{k-1} w_1.$$

También se puede dar una expresión explícita para los du_j en una vecindad de a_k en términos de las expresiones para los du_j en una vecindad de a . Esto lo obtenemos sustituyendo en cada diferencial w por ξw esto debido a que el valor de z no cambia al movernos por un camino, pero sí cambia el valor de w . Así obtenemos:

$$du_1 = \xi^{k-1} du_1$$

$$du_2 = \xi^{2k-2} du_2$$

$$du_3 = \xi^{4k-4} du_3$$

Sea $e_k = -l(1,k) + l(2,k)$ $1 \leq k \leq 7$

donde $l(j,k)$ es el segmento de recta orientado que parte de a_k y termina en b_j , y sea

$$\gamma_k = e_k - e_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq 6$$

Esto es:

$$\gamma_1 = -c_1$$

$$\gamma_2 = -c_2 + c_1$$

·
·
·

$$\gamma_6 = -c_6 + c_5$$

Luego:

$\{\gamma_1 \dots \gamma_6\}$ es base de homología de X .

Puesto que:

$$c_1 = -\gamma_1$$

$$c_2 = -\gamma_1 - \gamma_6$$

·
·
·

Obtenemos: $c = N \gamma$

$$c_6 = -\gamma_1 - \dots - \gamma_6$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base.

La ventaja de considerar la base de homología, es que permite escribir la integral de las diferenciales como diferencia de integrales sobre caminos e_k contenidos completamente en la k -ésima hoja y en cada una de estas hojas nosotros conocemos la expresión de los du_j en términos de la expresión en e_1 . Observemos además que e_1 es el camino que va del punto $b_1 = 0$ al punto $b_2 = 1$.

Denotando la integral de los du_j a lo largo de γ_k por $u(j,k)$ obtenemos:

$$u(1,k) = \int_{\gamma_k} \frac{(1-z)dz}{w^6} = \int_{e_k} z^{-6/7} (1-z)^{-5/7} dt - \int_{e_{k+1}} z^{-6/7} (1-z)^{-5/7} dz$$

$$= \xi^{k-1} \int_0^1 z^{-6/7} (1-z)^{-5/7} dz - \xi^k \int_0^1 z^{-6/7} (1-z)^{-5/7} dz$$

$$= \xi^{k-1} (1-\xi) B(1/7, 2/7)$$

donde: $B(p,q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} dz$ es la función Beta.

De la misma forma obtenemos:

$$u(2,k) = \xi^{2k-2} (1-\xi^2) B(2/7, 4/7)$$

$$u(3,k) = \xi^{4k-4} (1-\xi^4) B(4/7, 1/7)$$

Considerando la nueva base de diferenciales:

$$dv_1 = [(1-\xi) B(1/7, 2/7)]^{-1} du_1$$

$$dv_2 = [(1-\xi^2) B(2/7, 4/7)]^{-1} du_2$$

$$dv_3 = [(1-\xi^4) B(4/7, 1/7)]^{-1} du_3$$

Obtenemos la matriz período respecto a las bases η y dv :

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^6 & \xi & \xi^3 \\ 1 & \xi^4 & \xi & \xi^5 & \xi^2 & \xi^6 \end{pmatrix}$$

Además:

$$\det A = (\xi^3 + \xi^5 + \xi^6) - (\xi + \xi^2 + \xi^4) \neq 0 \text{ pues}$$

$$\xi^3 + \xi^5 + \xi^6 = -2\tau \quad \wedge \quad \xi + \xi^2 + \xi^4 = 2\tau - 1$$

donde $= \frac{1 + \sqrt{-7}}{4}$

Haciendo el cambio de base de diferenciales dadas por:

$$dt = A^{-1} dv$$

Obtenemos la matriz período con respecto a γ y dt :

$$(C D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2\tau-1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2\tau & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\tau-1 & -1 & -2\tau \end{pmatrix}$$

Ahora volviendo a la base de homología c obtenemos la matriz período respecto a c y dt :

$$(C D)_N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 & -2\tau-1 & -2\tau \\ 0 & -1 & -1 & -2\tau-1 & -2\tau & -2\tau-1 \\ 0 & 0 & -1 & -2\tau & -2\tau+1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por último como estamos interesados en las integrales sobre una base canónica de homología y la matriz de cambio de base c a la base canónica es T , obtenemos la matriz período con respecto a α y dt :

$$(E F) = (C D)_N T = \begin{pmatrix} -1 & 2\tau & -1-2\tau & -1 & 0 & 2-2\tau \\ -1 & 0 & -2\tau & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2-2\tau & -1 & 0 & 1+2\tau \end{pmatrix}$$

y normalizando obtenemos: $\Pi = (I Z)$ donde

$$Z = E^{-1} F = \begin{pmatrix} -4\tau^3 + \tau^2 & \tau^2 & 2\tau^3 \\ \tau^2 & -2\tau^3 + 2\tau^2 & \tau^2 \\ 2\tau^3 & \tau^2 & -4\tau^2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de Riemann buscada.

Veamos en dos ejemplos más la obtención de matrices de Riemann.

Ejemplo 1. Sea X la superficie de Riemann definida por la ecuación:

$$w^7 = z(1 - z)^4$$

Puntos de ramificación: $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = \infty$; $a = 1/2$; $p^{-1}(a) = \{1, \dots, 7\}$.

Permutaciones ($\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$): $\pi_1 = \sigma$, $\pi_2 = \sigma^4$, $\pi_3 = \sigma^2$.

Algoritmo canónico:

Matriz intersección:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de cambio, de la base C a la base canónica

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Base de diferenciales: $du_j = z^a(1-z)^b dz/w^{6-c}$, $j=1,2,3$.

Vía parámetros locales, obtenemos:

a	b	c
0	1	3
0	2	1
0	3	0

Luego: $du_1 = (1-z)dz/w^3$; $du_2 = (1-z)^2 dz/w^5$;

$$du_3 = (1-z)^3 dz/w^6$$

Expresión de las du_j en una vecindad de a_k en términos de su expresión en a_1 :

$$du_1 = \xi^{4k-4} du_1; \quad du_2 = \xi^{2k-2} du_2; \quad du_3 = \xi^{k-1} du_3, \quad \text{donde } \xi = e^{2\pi i/7}.$$

Nuevamente consideramos: $e_k = -1(1,k) + 1(2,k)$, $1 \leq k \leq 7$ y

$\gamma_k = e_k - e_{k+1}$, $1 \leq k \leq 6$. Entonces: $C = N\gamma$ donde N es la matriz anteriormente considerada. Luego:

$$u(1,k) = \xi^{4k-4} (1-\xi^4) B(4/7, 2/7); \quad u(2,k) = \xi^{2k-2} (1-\xi^2) B(2/7, 1/7);$$

$$u(3,k) = \xi^{k-1} (1-\xi) B(1/7, 4/7).$$

Cambio de base de diferenciales:

$$du_1 = (1-\xi^4)B(4/7, 2/7)dv_1; \quad du_2 = (1-\xi^2)B(2/7, 1/7)dv_2; \quad dv_3 = (1-\xi)B(1/7, 4/7)dv_3$$

Matriz período respecto a dv y γ :

$$(A \ B) = \begin{bmatrix} 1 & \xi^4 & \xi & \xi^5 & \xi^2 & \xi^6 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^6 & \xi & \xi^3 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 \end{bmatrix}$$

Matriz período respecto a dv y la base canónica de homología:

$$(E \ F) = (A \ B)NT = \begin{bmatrix} \xi^2 + \xi^3 + \xi^6 & -1 - \xi^4 & -1 - \xi^4 - \xi + \xi^6 & -1 + \xi^3 & \xi^2 + \xi^3 & 1 + \xi^6 \\ \xi + \xi^3 + \xi^5 & -1 - \xi^2 & -1 - \xi^2 - \xi^4 + \xi^3 & -1 + \xi^5 & \xi + \xi^5 & 1 + \xi^3 \\ \xi^4 + \xi^5 + \xi^6 & -1 - \xi & -1 - \xi - \xi^2 + \xi^5 & -1 + \xi^6 & \xi^4 + \xi^6 & 1 + \xi^5 \end{bmatrix}$$

$$\det E = -6 - 3\xi - 3\xi^2 - 3\xi^4 - \xi^6 = a \neq 0,$$

$$E^{-1} = 1/a \begin{bmatrix} -1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 - 2\xi^5 & -1 + \xi + \xi^2 + \xi^5 - 2\xi^6 & -1 + \xi - 2\xi^3 + \xi^4 + \xi^6 \\ 1 - \xi + \xi^2 + \xi^5 - 2\xi^6 & 1 + \xi - 2\xi^3 - \xi^4 + \xi^6 & 1 - \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 - 2\xi^5 \\ 1 - \xi^2 - \xi^3 + \xi^6 & 1 - \xi + \xi^3 - \xi^5 & 1 - \xi^4 + \xi^5 - \xi^6 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de Riemann es:

$$Z = 1/a \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{bmatrix}$$

donde: $z_1 = 6 - 4\xi - 4\xi^2 + 2\xi^3 - 4\xi^4 + 2\xi^5 + 2\xi^6$

$$z_2 = -3 - 2\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3 - 2\xi^4 + 3\xi^5 + 3\xi^6$$

$$z_3 = -3 + 2\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + 2\xi^4 - \xi^5 + \xi^6$$

$$z_4 = 2 - 2\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - 2\xi^4 + 2\xi^5 + \xi^6$$

$$z_5 = 2 + 2\xi^2 - 2\xi^3 + 2\xi^4 - 2\xi^5 - 2\xi^6$$

$$z_6 = 2 - 3\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3 - 3\xi^4 + 2\xi^5 + 2\xi^6.$$

Ejemplo 2. Sea X la superficie de Riemann definida por la ecuación:

$$w^7 = z(1-z)^5.$$

Puntos de ramificación: $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = \infty$; $a = 1/2$; $p^{-1}(a) = \{1, \dots, 7\}$.

Permutaciones $(\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7))$: $\pi_1 = \sigma$; $\pi_2 = \sigma^5$; $\pi_3 = \sigma$.

Algoritmo canónico:

Matriz intersección:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de cambio de la base C a la base canónica:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Base de diferenciales: $du_j = z^a(1-z)^b dz/w^{6-c}$, $j=1,2,3$.

Vía parámetros locales, obtenemos:

a	b	c
0	2	2
0	3	1
0	4	0

Luego: $du_1 = (1-z)^2 dz/w^4$; $du_2 = (1-z)^3 dz/w^5$;

$$du_3 = (1-z)^4 dz/w^6$$

Expresión de las du_j en una vecindad de a_k en términos de su expresión en

α_1 :

$$du_1 = \xi^{3k-3} du_1; \quad du_2 = \xi^{2k-2} du_2; \quad du_3 = \xi^{k-1} du_3; \quad \text{donde } \xi = e^{2\pi i/7}.$$

Sea $e_k = -1(1,k) + 1(2,k)$, $1 \leq k \leq 7$ y $\gamma_k = e_k - e_{k+1}$, $1 \leq k \leq 6$.

Entonces: $C = N\gamma$, donde N es la matriz anterior. Luego:

$$u(1,k) = \xi^{3k-3} (1-\xi^3)^{B(3/7,1/7)}; \quad u(2,k) = \xi^{2k-2} (1-\xi^2)^{B(2/7,3/7)};$$

$$u(3,k) = \xi^{k-1} (1-\xi)^{B(1/7,5/7)}.$$

Cambio de base de diferenciales:

$$du_1 = (1-\xi^3)^{B(3/7,1/7)} dv_1; \quad du_2 = (1-\xi^2)^{B(2/7,3/7)} dv_2; \quad du_3 = (1-\xi)^{B(1/7,5/7)} dv_3$$

Matriz período respecto a dv y γ :

$$(A \ B) = \begin{bmatrix} 1 & \xi^3 & \xi^6 & \xi^2 & \xi^5 & \xi \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^6 & \xi & \xi^3 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 & \xi^5 \end{bmatrix}$$

Matriz período respecto a dv y la base canónica de homología:

$$(E \ F) = (A \ B)NT = \begin{bmatrix} -1 & \xi^2 + \xi^6 & \xi + \xi^4 & -1 - \xi^3 & -1 - \xi^3 - \xi^6 & -\xi - \xi^5 \\ -1 & \xi^4 + \xi^6 & \xi^3 + \xi^5 & -1 - \xi^2 & -1 - \xi^2 - \xi^4 & -\xi - \xi^3 \\ -1 & \xi^2 + \xi^3 & \xi^5 + \xi^6 & -1 - \xi & -1 - \xi - \xi^2 & -\xi^4 - \xi^5 \end{bmatrix}$$

$$\det E = 1 + 3\xi - 2\xi^2 - \xi^3 - \xi^4 = a \neq 0,$$

$$E^{-1} = 1/a \begin{bmatrix} -1-\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4-\xi^6 & -\xi+\xi^3-\xi^5+\xi^6 & -\xi+\xi^2-\xi^3+\xi^4 \\ -\xi^3+\xi^6 & \xi+\xi^4-\xi^5-\xi^6 & -\xi+\xi^3-\xi^4+\xi^5 \\ -\xi^2-\xi^3+\xi^4+\xi^6 & \xi^3-\xi^6 & \xi^2-\xi^4 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de Riemann es:

$$Z = 1/a \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + 2\xi - 2\xi^5 - \xi^6 \\ z_2 &= 1 + \xi - \xi^3 - \xi^4 + \xi^5 - \xi^6 \\ z_3 &= -1 + \xi - \xi^2 - \xi^3 + \xi^5 + \xi^6 \\ z_4 &= 2\xi^2 + \xi^3 - \xi^4 - 2\xi^5 \\ z_5 &= -2 + 2\xi - \xi^3 - \xi^4 + 2\xi^6 \\ z_6 &= 2\xi + \xi^2 + \xi^3 - \xi^4 - \xi^5 - 2\xi^6. \end{aligned}$$

Para concluir, deseo que quede en claro algunas observaciones. Lo primero, que este trabajo está basado en el artículo de los señores C. L. Tretkoff y M. D. Tretkoff especificado en las referencias. Además se han usado dos resultados, uno de los cuales dice que toda superficie de Riemann compacta admite al menos una representación por medio de una ecuación algebraica ([1], pág. 225), y el segundo, que toda superficie de género g posee una base de diferenciales abelianas de primera especie cuya cardinalidad es g ([3], Vol. II, pág. 108).

REFERENCIAS:

- [1] Tretkoff, C. L. y Tretkoff, M. D., Combinatorial Group theory, Riemann surfaces and Differential Equations. Preprint, University of N. Y.
- [2] Gunning, R. C., Lectures on Riemann Surfaces, Princeton University Press (1967).
- [3] Siegel, C. L., Topics in Complex Function Theory, Vol. I (1969), Vol. II (1971), Vol. III (1973), Wiley-Interscience, N. Y.