REVISTA PROYECCIONES N° 11: 178-182
 Julio 1986 - I.S.S.N. 0716-0917

UN CAMPO POLINOMIAL DE VECTORES DE GRADO

$2k+1$ CON $\frac{(2k+1)^2+1}{2}$ CENTROS

IVAN SZANTO N.*

RESUMEN.

En esta nota, se demuestra que dado un campo polinomial de grado $2k+1$, con sólo singularidades elementales en la parte finita del plano y sin singularidades en la parte infinita, tiene a lo más $\frac{(2k+1)^2+1}{2}$ centros.

Teorema.

Consideremos un campo polinomial de grado $2k+1$

$$X(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

con solo puntos de equilibrios elementales y sin singularidades en el in-

* Departamento de Matemática - Universidad Técnica Federico Santa María - Valparaíso, Chile.

finito, entonces (1) tiene a lo más $\frac{(2k+1)^2+1}{2}$ centros.

Demostración.

Supongamos que (1) tiene $\frac{(2k+1)^2+1}{2} + 1$ centros, denotemos por C_i los centros y S_i las otras singularidades, entonces

$$\sum \text{ind } C_i + \sum \text{ind } S_i = 1$$

luego $\sum \text{ind } S_i = -\frac{(2k+1)^2+1}{2}$ lo que es una contradicción dado que (1) tiene a lo más $\frac{(2k+1)^2-3}{2}$ singularidades que no son centros.

Ejemplo:

Consideremos el campo (1) con

$$P(x,y) = y \prod_{i=1}^k (\alpha_i - y^2), \quad Q(x,y) = -x \prod_{i=1}^k (\alpha_i - x^2) \quad (2)$$

de manera que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Las singularidades de (2) son

$$S = \{(x,y)/x=0, \pm \sqrt{\alpha_i}; y=0, \pm \sqrt{\alpha_i}\}, \quad i=1, \dots, k.$$

Campo de sectores de grado 1° con 181 centros y 180 sillas.

Dado que

$$\begin{aligned} \det DX(x,y) = & \prod_{i=1}^k (\alpha_i - y^2) (\alpha_i - x^2) - 2x^2 \sum_{i=1}^k \prod_{i=1}^k (\alpha_i - y^2) \prod_{j=1}^k (\alpha_i - x^2) - \\ & - 2y^2 \sum_{i=1}^k \prod_{i=1}^k (\alpha_i - x^2) \prod_{j=1}^k (\alpha_i - y^2) + \\ & + 4x^2 y^2 \left(\sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k (\alpha_i - y^2) \right) \left(\sum_{i=1}^k \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^k (\alpha_i - x^2) \right) \end{aligned}$$

y $P(x, -y) = -P(x, y)$, $Q(x, -y) = Q(x, y)$, entonces $(0,0)$ es un centro y $(\pm \sqrt{\alpha_i}, \pm \sqrt{\alpha_j})$ es un centro si $i+j$ es par y es un punto silla si $i+j$ es impar.

Por otro lado, considerando la Transformación de Poincaré $z = \frac{1}{x}$, $y = \frac{u}{z}$ se obtiene el campo compactificado.

$$\dot{z} = uz \prod_{i=1}^k (\alpha_i z^2 - u^2)$$

$$\dot{u} = u^2 \prod_{i=1}^k (\alpha_i z^2 - u^2) + \prod_{i=1}^k (\alpha_i z^2 - 1)$$

y para $z=0$, se tiene la ecuación de los puntos críticos $u^{2k+2} + 1 = 0$, que no posee soluciones reales, luego el campo no tiene puntos de equilibrio en el infinito excepto quizás al final del eje vertical [1].

Para investigar los puntos en el infinito en el eje vertical, consideramos las transformaciones de Poincaré.

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}$$

obteniendo para $z=0$, $v^{2+2u} + 1 = 0$ ecuación sin solución en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, para $k=9$, el retrato de fases para (2) con 181 centros y 180 sillas es como el de la figura.

REFERENCIAS.

- [1] A. A. Andronow, et. al.
Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems.
John Wiley & Sons, New York, 1973.

- [2] V. I. Arnol'd.
Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations
Springer-Verlag. New York, 1983.