DOI: 10.22199/S07160917.1986.0012.00010

REVISTA PROYECCIONES N° 12:109-111
Diciembre 1986 - ISSN 0716-0917
Jornada Matemáticas, Agosto 1986.

GENERACION DE UNA ORBITA PERIODICA A PARTIR DE UNA HOMOCLÍNICA EN ECUACIONES PARABOLICAS

Dr. MIGUEL BLAZQUEZ*

RESUMEN:

Supongamos que f es un C^k, $k \geq 1$ campo vectorial en el plano, se sabe que existe una vecindad U(f) en C^k y una subvariedad Γ de codimensión uno, que divide U(f) en dos regiones U_1 y U_2. Si $g \in \Gamma$ entonces la ecuación $\dot{x} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, posee una órbita homoclínica γ a un punto silla hiperbólico x_0, o sea, $\gamma = \{p(t)\}$ tal que $\lim_{t \to \pm\infty} p(t) = x_0$. Si $g \in U_1$, la ecuación tiene un punto silla y una única órbita periódica cerca de γ, en el caso que $g \in U_2$, existe el punto de equilibrio cercano a x_0, pero no hay ni órbita periódica u homoclínica. Ver Andronov y otros, Chow-Hale-Mallet-Paret.

Para campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$, Sil'nikov extendió estos resultados bajo cierta condición para los valores propios de la matriz de li-

---

* Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso - Chile.

nearización en torno a x_0.

El propósito de este trabajo es extender estos resultados a ecuaciones donde aparece un operador sectorial A en un espacio de Banach X. La mayoría de los operadores elípticos con condiciones de frontera definen operadores sectoriales, como se puede ver en Friedman y Pazy.

Consideraremos la ecuación $\dot{z} + Az = f(z)$ donde $f \in C^k$, $f(0) = 0$, o sea 0 es un punto de equilibrio y lo consideraremos silla hiperbólica, además asumiremos la existencia de una homoclínica $\gamma = \{p(t)\}$. Usando el método de Liapunov-Schmidt, al perturbar la ecuación y linearizarla en torno a Γ se obtiene $\dot{x} + A(t)x = F(t,x,f)$ donde $A(t)$ es Fredholm. La existencia de una homoclínica en la ecuación perturbada se reduce a la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi(t) , F(t,x,f,) \rangle dt = 0$ donde φ es solución acotada del sistema lineal adjunto. Se puede demostrar que el conjunto de funciones que satisfacen tal condición forman una variedad de codimensión uno, por lo tanto, para conocer la bifurcación que ocurre es suficiente considerar una familia de funciones uniparamétricas que corten transversalmente Γ . Estudiaremos $\dot{x} + Ax = f(x,\varepsilon)$ tal que $f(x,0) = f(x)$.

En el caso que la variedad inestable del punto de equilibrio tenga sólo dimensión uno, podemos definir la aplicación de retorno T como la composición de un operador T_0, cercano al punto silla (de tipo exponencial) con un operador T, según las trayectorias cercanas a la homoclínica. Gracias a la forma de T_0 , T resulta ser una contracción en un dominio cerrado, lo que nos da la existencia de un único punto fijo, o sea de una orbita periódica estable. En este caso consideramos que la contracción sobre la variedad estable fue mayor que la expansión sobre la variedad inestable.

En el caso que la variedad inestable tiene dimensión n cualquiera, las anteriores asunciones no son suficientes y no se puede usar el teorema de la contracción, debemos usar el teorema de la función inversa, y para que eso sea posible debemos agregar una nueva condición.

Sea W^{α} y W^{ω} las subvariedades de la variedad inestable que intersectan una vecindad U del origen, entonces $\overline{W}\alpha \cap \overline{W}^{\omega} = W_{n-1} \cap U$ donde W_{n-1} es una subvariedad de dimensión (n-1) complementaria (en la vecindad) al vector propio, tangente al cual, la homoclínica abandona el origen.

REFERENCIAS:

[1] Andronov, Leontovich y otros. "Theory of bifurcation in the plane". Wiley, 1973.

[2] C. M. Blázquez. "Bifurcation from a homoclinic orbit in parabolic diferential equations". Proc. of Royal Soc. of Edimburgh, 103A, 1986.

[3] Chow - Hale, Mallet-Paret. "An example of bifurcation to homoclinic orbits". J. Diff Eq. 37, 1980.

[4] Friedman. "Partial diferential eq.". Holt, Rinehart, Winston, 1969.

[5] Pazy. "Semigroups of linear operators and applications to P.D.E.". Appl. Math. Sc. 44 Springer-Verlag, 1983.

[6] Sil'nikov. "Some cases of generation of periodic motions from singular trajectories". Mat. Sbornik 61 (103), 1963.

[7] L. Sil'nikov. "On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotie to an equilibrium state of saddle type". Mat. Sbornik 77, (119), 1968.