REVISTA PROYECCIONES N° 11: 80-123
Julio 1986 - I.S.S.N. 0716-0917

BIFURCACIONES LINEALES DE LA SINGULARIDAD $x \frac{\partial}{\partial y}$ A TRES PARAMETROS

J. BILLEKE*

M. CAÑAS**

E. SAEZ**

RESUMEN.

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento cualitativo de las singularidades de la ecuación diferencial.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda_2 y + a_3 y^3 \\ \dot{y} = x + \mu y + b_2 y^2 \end{cases}$$

donde $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3$, $a_3 \neq 0$ y $b_2^2 + 2a_3 > 0$

Esto corresponde a analizar los desdoblamientos lineales de la singularidad $x \frac{\partial}{\partial y}$ de codimensión tres.

* Pontificia Universidad Católica de Chile, Sede Talcahuano. Departamento de Matemática.

** Universidad Técnica Federico Santa María - Chile. Departamento de Matemática.

SUMMARY.

The aim of this work is to study the cualitative behavior at the singularities of the Differential Equation.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda_2 y + a_3 y^3 \\ \dot{y} = x + \mu y + b_2 y^2 \end{cases}$$

where $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3$, $a_3 \neq 0$ y $b_2^2 + 2a_3 > 0$

It means to analice the linear unfolding of the singularity $x \frac{\partial}{\partial y}$ on codimension 3.

BIFURCACIONES LINEALES DE LA SINGULARIDAD $x \frac{\partial}{\partial y}$ A TRES PARAMETROS*

Sea $X = x \frac{\partial}{\partial y}$ campo de vectores lineales en $\mathbb{R}^2$ y consideremos en el espacio de gérmenes de singularidades de campos vectoriales en el origen de $\mathbb{R}^2$, G^2 , el siguiente conjunto.

$$W = \{X \in G^2 / j_1(X)(0) = j_1(X_1)(0)\}$$

donde $j_k(X)(0)$ indica el k -jet de X en 0 .

Entonces en [6], se demuestra que para todo $X \in W$ existe un C^∞ -difeomorfismo $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que

$$\varphi_* X = x_1 + \sum_{i=2}^k (a_i y^i \frac{\partial}{\partial x} + b_i y^i \frac{\partial}{\partial y}) + R_k, \text{ donde } j_k(R_k)(0) = 0 \text{ el caso } k = \infty$$

* Los autores agradecen la colaboración del Profesor Iván Szántó y al Programa PNUD.

no está excluido.

Sea $V' = \{X \in W / \psi_* X \text{ satisfaga } a_2 \neq 0\}$. En [6] se demuestra que V es un conjunto semi-algebraico de codimensión 2 en G^2 y sólo tiene 1 clase de singularidad por C^0 -equivalencia. Además F. Takens en [5] demostró que:

$$(\mu_1 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (x + \mu_2 y + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

es un desdoblamiento versal a 2-parámetros de la singularidad $x \frac{\partial}{\partial y}$.

Sea ahora $V = \{X \in W / \psi_* X \text{ satisface } a_2 = 0, a_3 \neq 0 \text{ y } b_2^2 + 2a_3 > 0\}$.

En [3] se demuestra que V es un conjunto semi-algebraico de codimensión 3 en G^2 y además sólo tiene dos clases distintas de singularidades por C^0 -equivalencias.

Como V es de codimensión tres queremos estudiar como se bifurcan a tres parámetros los elementos X de V . Iniciemos este trabajo mirando a $D_L \subset \mathbb{R}^\infty (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3)$ conjunto de desdoblamiento lineales a tres parámetros de la singularidad $x \frac{\partial}{\partial y}$. $Y \in D_L$ entonces

$$Y = Y_1 \frac{\partial}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + Y_4 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + Y_5 \frac{\partial}{\partial \mu}, \text{ donde}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 y + a_1 y^3 \\ Y_2 = x + \mu y + b_2 y^2, \quad Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0 \end{cases}$$

$$a_3 \neq 0 \text{ y } b_2^2 + 2a_3 > 0.$$

$$\text{Sea } P : D_L \rightarrow \mathbb{R}^\infty (\mathbb{R}^2), (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) \rightarrow (Y_1, Y_2)$$

Si $\mathbb{R}_L = \text{Imagen de } P$, entonces las singularidades de $X \in \mathbb{R}^\infty (\mathbb{R}^2)$ dependen de:

$\Delta := b_2^2 \lambda_1^2 + 4a_3(\lambda_1 \mu - \lambda_2)$ y se presentan tres casos:

Caso 1: $\Delta < 0 \Rightarrow X$ se anula sólo en el origen.

Caso 2: $\Delta = 0 \Rightarrow P_0 = (0,0)$ y $P_1 = \frac{b_1 \lambda_1}{2a_3}(-\mu - \frac{b_2^2 \lambda_1}{2a_3}, 1)$

son las únicas singularidades de $X(b_2 \lambda_1 \neq 0)$.

Caso 3: $\Delta > 0$ $P_0 = (0,0)$ y

$$P_{+,-} = \frac{b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_3} \left(-\mu - \frac{b_2}{2a_3} (b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta}), 1 \right)$$

son las únicas singularidades de x .

1. De lo anterior, $X(0,0) = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}$, $DX(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, $\det$
 $DX(0,0) = \lambda_1 \mu - \lambda_2$, $\text{tr } DX(0,0) = \lambda_1 + \mu$

Definición:

$$\Sigma_1^{g(\varepsilon)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 / \text{sgn}(\lambda_1 \mu - \lambda_2) = \varepsilon\}$$

$$\Sigma_2^{g(\varepsilon)} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 / \text{sgn}(\lambda_1 + \mu) = \varepsilon\}$$

donde

$$g(\varepsilon) = \begin{cases} + & , \varepsilon = 1 \\ 0 & , \varepsilon = 0 \\ - & , \varepsilon = -1 \end{cases}$$

Fig. 1

Lema 1.1. Sea $X \in \mathfrak{X}_L$

El origen es una singularidad hiperbólica ssi

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^- \cup (\Sigma_1^+ \mid \Sigma_2^0).$$

Además la singularidad es del tipo:

- a) silla, si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^-$
- b) atractor, si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-$
- c) repulsor, si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$

Demostración: Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^- \cup (\Sigma_1^+ \mid \Sigma_2^0)$. Entonces

1. $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^-$ implica valores propios de $DX(0,0)$ reales y de signos contrarios.
2. $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \setminus \Sigma_2^0$ implica valores propios de $DX(0,0)$ con parte real no-nula.

De 1 y 2 se concluye que la singularidad es hiperbólica. Recíprocamente, si la singularidad es hiperbólica, entonces los valores propios tienen parte real no-nula, de donde $\det DX(0,0) \neq 0$. Además:

1. $\det DX(0,0) < 0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^-$
2. $\det DX(0,0) > 0 \Rightarrow \operatorname{tr} DX(0,0) \neq 0$, (si no, los valores propios tienen parte real nula),
por lo tanto $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \setminus \Sigma_2^0$

Es claro que: $\Sigma_1^- \cup (\Sigma_1^+ \setminus \Sigma_2^0) = \Sigma_1^- \cup (\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-) \cup (\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+)$

- a) $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^- \Rightarrow$ silla hiperbólica por 1.-
- b) $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^- \Rightarrow$ valores propios de $DX(0,0)$ tienen parte real negativa, luego la singularidad es un atractor hiperbólico.

- c) $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+ \Rightarrow$ valores propios de $DX(0,0)$ tienen parte real positiva, luego la singularidad es un repulsor hiperbólico.

Sea $\pi : \mathbb{X}_L \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que, $X \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \mu)$,

$$\mathcal{V}_0 = \Sigma_1^- \cup (\Sigma_1^+ \setminus \Sigma_2^0) \text{ y } \mathcal{V}_0 \doteq \pi^{-1}(\mathcal{V}_0)$$

Lema 1.2.

$\mathcal{V}_0$ es un conjunto semi-algebraico de codim 0 en $\mathbb{X}_L$.

Demostración: Claramente $\Sigma_1^{g(\varepsilon)}$, $\Sigma_2^{g(\varepsilon)}$ con $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ son semialgebraicos de codim 0 en $\mathbb{R}^3$, luego $\mathcal{V}_0$ es un conjunto semi-algebraico de codim 0 en $\mathbb{R}^3$. Además π es una función algebraica, luego por Seidenberg-Tarski [4], $\mathcal{V}_0$ es un conjunto semi-algebraico de codim 0 en $\mathbb{X}_L$.

Lema 1.3.

Sea $X \in \mathbb{X}_L$.

El origen es una singularidad parcialmente hiperbólica de X ssi $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \setminus \Sigma_2^0$

Además:

- a) Si $\lambda_1 = 0$, existen tres casos:

- a1): $a_3 > 0 \wedge \mu < 0 \Rightarrow$ silla no hiperbólico
- a2): $a_3 > 0 \wedge \mu < 0 \Rightarrow$ silla no hiperbólico
- a3): $a_3 < 0 \wedge \mu > 0 \Rightarrow$ repulsor no hiperbólico con W^c repulsor
- a4): $a_3 < 0 \wedge \mu < 0 \Rightarrow$ atractor no hiperbólico con W^c atractor

- b) $\lambda_1 \neq 0 \wedge b_2 \neq 0 \Rightarrow$ las singularidades son sillas nodos presentándose los siguientes casos:

Si $b_2 > 0$ entonces

$$b1) \quad \mu + \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_1 > 0 \Rightarrow (W_{-}^C, W^u)$$

$$b2) \quad \mu + \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_1 < 0 \Rightarrow (W_{+}^C, W^u)$$

$$b3) \quad \mu + \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_1 > 0 \Rightarrow (W_{+}^C, W^S)$$

$$b4) \quad \mu + \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_1 < 0 \Rightarrow (W_{-}^C, W^S)$$

Si $b_2 < 0$ entonces:

$$b5) \quad \mu + \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_1 > 0 \Rightarrow (W_{+}^C, W^u)$$

$$b6) \quad \mu + \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_1 < 0 \Rightarrow (W_{-}^C, W^u)$$

$$b7) \quad \mu + \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_1 > 0 \Rightarrow (W_{-}^C, W^S)$$

$$b8) \quad \mu + \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_1 < 0 \Rightarrow (W_{+}^C, W^S)$$

(ver figuras 2).

c) $\lambda_1 \neq 0 \wedge b_2 = 0 \Rightarrow a1), a2), a3) \text{ y } a4)$ reemplazando μ por $\mu + \lambda_1$.

(ver figuras 3)

Demostración:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^{\circ} \setminus \Sigma_2^{\circ} \Leftrightarrow \det DX(0,0) = 0 \wedge \operatorname{tr} DX(0,0) \neq 0,$$

$$\operatorname{Spec} DX(0,0) = \{0, \operatorname{tr} DX(0,0)\} \neq \{0\} \Leftrightarrow$$

la singularidad es parcialmente hiperbólica.

$$\text{Además, } x \in \mathbb{R}_L \text{ tal que } (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^{\circ} \setminus \Sigma_2^{\circ} \Rightarrow$$

$$X = (\lambda_1 x + \lambda_1 \mu y + a_3 y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x + \mu y + b_2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sea $\varphi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, $(x, y) \mapsto \left(\frac{x - \lambda_1 y}{\lambda_1 + \mu}, \frac{x + \mu y}{\lambda_1 + \mu} \right) = (u, v)$, entonces φ es un isomorfismo lineal y

$$\varphi_* X(u, v) = (\delta(v-u)^2 + \gamma(v-u)^3) \frac{\partial}{\partial u} + (\alpha v + \beta(v-u)^2 + \gamma(v-u)^3) \frac{\partial}{\partial v},$$

$$\text{donde: } \alpha = \mu + \lambda_1, \beta = b_2(1 - \frac{\lambda_1}{\mu + \lambda_1}); \gamma = \frac{a_3}{\alpha}, \delta = \beta - b_2.$$

a) $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \delta = 0 \wedge \mu \neq 0 \Rightarrow$

$$\varphi_* X(u,v) = \frac{a_3}{\mu}(v-u)^3 \frac{\partial}{\partial u} + (\mu v + \beta(v-u)^2 + \gamma(v-u)^3) \frac{\partial}{\partial v}$$

por la técnica de variedad central, se presentan los 3 casos siguientes según $\text{sgn}(\mu)$, $\text{sgn}(a_3)$

1.- $a_3 > 0 \wedge \mu < 0 :$

silla no-hiperbólica

2.- $a_3 > 0 \wedge \mu > 0 :$

silla no-hiperbólica

3.- $a_3 < 0 \wedge \mu > 0 :$

repulsor no-hiperbólico con W^C repulsora.

4.- $a_3 < 0 \wedge \mu < 0 :$

atractor no-hiperbólico con W^C atractora.

Fig. 2

b) $\lambda_1 \neq 0 \wedge b_2 \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 0$ y como $\alpha \neq 0$ por la técnica de la variedad central, es inmediato que las singularidades son sillanodos con las orientaciones dadas por b1) hasta b8).

(W_-^C, W_-^u)

 (W_-^C, W_-^s)

 (W_+^C, W_+^u)

 (W_+^C, W_+^s)

Fig. 3

$$c) \quad \lambda_1 \neq 0, \quad b_2 = 0 \Rightarrow \mu \neq 0, \quad \mu = \frac{a_2}{\mu + \lambda_1}, \quad u = v + \mu + \lambda_1$$

$$\Rightarrow \varphi_* X(u-v) = \frac{a_3}{\mu + \lambda_1} (v-u)^3 \frac{\partial}{\partial u} + ((\mu + \lambda_1)v + \frac{a_3}{\mu + \lambda_1} (v-u)^3) \frac{\partial}{\partial v}$$

que corresponde al caso a) sustituyendo μ por $\mu + \lambda_1$.

Lema 1.4. Sea $X \in \mathfrak{X}_L$ con $b_2 \neq 0$.

El origen es un foco no-hiperbólico ssi

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^\circ \cap \Sigma_1^+ \text{ y } \lambda_1 \neq 0$$

Dem. $(\Leftarrow)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^\circ \cap \Sigma_1^+ \Rightarrow \lambda_1 + \mu = 0$

$$\wedge \lambda_1 \mu - \lambda_2 > 0, \text{ luego } X = (\lambda_1 x + \lambda_2 y + a_3 y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x - \lambda_1 y + b_2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\text{y } \text{Spec } DX(0,0) = \{\pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2}\} \text{ donde } \lambda_1^2 + \lambda_2 < 0$$

$$\text{Definamos } b = \sqrt{-(\lambda_1^2 + \lambda_2)} > 0 \text{ y sea } \varphi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

tal que $\varphi(x,y) = (\frac{x - \lambda_1 y}{b}, y)$ isomorfismo lineal. Entonces

$$Y = \varphi_* X(u,v) = (-bv - \frac{\lambda_1 b_2}{b} v^2 + \frac{a_3}{b} v^3) \frac{\partial}{\partial u} + (bu + b_2 v^2) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Sea $\psi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que

$$\psi(u,v) = (-bv, bu + b_2 v^2) \text{ con } \det D\psi(0,0) = b^2 > 0,$$

es decir, ψ es un difeomorfismo. Entonces

$$Z = \psi_* Y(x,y) = (-by) \frac{\partial}{\partial x} + (bx - \frac{2b_2}{b} xy - \frac{a_3}{b^3} x^3 - \frac{\lambda_1 b_2}{b^2} x^2) \frac{\partial}{\partial y},$$

$\text{Spec } DZ(0,0) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, donde $\alpha_1 = ib$, $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$, es decir, $\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ valores propios de resonancia 3 [Arnold], por lo tanto los términos cuadráticos de Z son no-resonantes y se pueden eliminar. En efecto, sea $h(x,y) = (h_1(x,y), h_2(x,y))$ tal que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\lambda_1 b_2}{b^2} x^2 - \frac{2b_2}{b} xy \end{bmatrix} \quad \text{implica}$$

$$h(x, y) = \left[\frac{\lambda_1 b_2}{3b^3} x^2 + \frac{2\lambda_1 b_2}{3b^3} y^2 - \frac{2}{3} \frac{b_2}{b^2} xy, \right.$$

$$\left. \frac{2}{3} \frac{b_2}{b^2} x^2 - \frac{2}{3} \frac{b_2}{b^2} y^2 - \frac{2}{3} \frac{\lambda_1 b_2}{b^3} xy \right]$$

Sean $\eta : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que

$\eta^{-1}(u, v) = (u + h_1(u, v), v + h_2(u, v))$. Es claro que η es difeomorfismo. Entonces:

$$\eta_* Z(u, v) = (-bv + R_4(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+ (bu + \alpha u^3 + \beta v^3 + \gamma u^2 v + \delta uv^2 + Q_4(u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

$$\text{donde } \alpha = -\frac{1}{9b^5} (6\lambda_1^2 b_2^2 + 20b^2 b_2^2 + 9b^2 a_3),$$

$$\beta = -\frac{4}{3} \frac{\lambda_1 b_2^2}{b^4}, \quad \gamma = \frac{2\lambda_1 b_2^2}{b^4}, \quad \delta = \frac{b_2^2}{9b^5} (8b^2 - 12\lambda_1^2),$$

$$j_3(R_4(u, v)(0, 0)) = 0 = j_3(Q_4(u, v)(0, 0)).$$

Considerando $z = u + iv$, el campo correspondiente se puede representar por la ecuación:

$$\dot{z} = \lambda z + \alpha' z^3 + \beta' \bar{z}^3 + \gamma' z^2 \bar{z} + \delta' z \bar{z}^2 + R_4(z, \bar{z})$$

$$\text{donde } \alpha' = \frac{1}{8}(i\alpha - \beta + \gamma - i\delta), \quad \beta' = \frac{1}{8}(i\alpha + \beta - \gamma - i\delta)$$

$$\gamma' = \frac{1}{8}(3i\alpha + 3\beta + \gamma + i\delta), \quad \delta' = \frac{1}{8}(3i\alpha - 3\beta - \gamma + i\delta),$$

$$j_3(R_4(z, \bar{z})(0,0)) \equiv 0.$$

Los términos $z^3, \bar{z}^3$ son no-resonantes y se pueden eliminar [1].
En efecto: sea

$$f : (\mathbb{T}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{T}^2, 0) \text{ tal que:}$$

$$f^{-1}(w, \bar{w}) = (g(w, \bar{w}), \bar{g}(w, \bar{w})), \text{ donde}$$

$$g(w, \bar{w}) = w + \frac{\alpha'}{2ib} w^3 - \frac{\beta'}{4ib} \bar{w}^3 - \frac{\delta'}{2ib} w \bar{w}^2.$$

Luego la ecuación queda:

$$\dot{w} = ibw + \gamma' w |w|^2 + R(w, \bar{w}), \text{ donde } j_4(R(w, \bar{w})(0,0)) \equiv 0$$

y $\text{Re} \gamma' = -\frac{1}{4} \frac{\lambda_1 b_2^2}{b^*} \neq 0$ implica que la singularidad, para $b_2 \neq 0$, es un foco no-hiperbólico, atractor o repulsor si $\lambda_1 > 0$ ó $\lambda_1 < 0$, respectivamente.

$$(\Rightarrow) \text{ Foco no hiperbólico y } D\underline{X}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \text{ con } b > 0 \Rightarrow$$

tra $DX(0,0) = 0 \wedge \det DX(0,0) > 0$, luego $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^+$.

Si $\text{Im } \lambda \neq 0$ entonces $\text{tr } DX(0,0) = 0 \wedge \det DX(0,0) > 0$ luego $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^+$.

Si $\text{Im } \lambda = 0$ entonces $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^0$ y por Lema 7 la singularidad no es un foco no-hiperbólico, luego suponer $\text{Im } \lambda = 0$ lleva a contradicción.

Obs. Si $\lambda_1=0$, el origen es un centro [7].

Lema 1.5. $x \in \mathcal{X}_L$ con $b_2 = 0$

El origen es un centro no-hiperbólico ssi

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^+.$$

Dem. Usando el isomorfismo lineal ψ del Lema 1.4 y haciendo $b_2 = 0$ se tiene:

$$Y(u,v) = (-bv + \frac{a_3}{b} v^3) \frac{\partial}{\partial u} + bu \frac{\partial}{\partial v} \text{ entonces}$$

$$(\Leftarrow) Y(-u, -v) = -Y(u,v).$$

Sea $\varphi((u_0, v_0), t) = (\varphi_1, \varphi_2)$ una órbita y

$$\hat{\varphi}((u_0, v_0), t) = (-\varphi_1, -\varphi_2) \text{ una curva}$$

$$Y(-\varphi_1, -\varphi_2) = -Y(\varphi_1, \varphi_2) = - \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial t}(-\varphi_1), \frac{\partial}{\partial t}(-\varphi_2) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(-\varphi) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varphi} \text{ entonces el origen es un centro.}$$

Como $DY(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $b \neq 0$ entonces el centro es no-hiperbólico.

$$(\Rightarrow) \text{ centro no-hiperbólico} \Rightarrow DY(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

traza $DX(0,0) = 0 \wedge \det DX(0,0) = b^2 > 0$, luego $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^+$

Lema 1.6. Sean $\mathcal{O}_1 = \Sigma_1^0 \setminus \Sigma_2^0 \cup (\Sigma_2^0 \cap \Sigma_1^+)$ y

$V_1 = \pi^{-1}(\mathcal{O}_1)$, entonces V_1 es un conjunto semialgebraico de codim 1 en $\mathfrak{X}_L$.

Dem. Claramente $\mathcal{O}_1$ es un conjunto semi-algebraico de codimensión 1 en $\mathbb{R}^3$ y como π es una función algebraica, entonces por [4], V_1 es un conjunto semi-algebraico de codim 1 en $\mathfrak{X}_L$.

Lema 1.7. Sea $X \in \mathfrak{X}_L$ con $b_2 \neq 0$.

El origen es una "cúspide" ssi $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_1^0 \setminus \{0\}$.

Dem. $(\Leftarrow)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0 \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lambda_1 \mu - \lambda_2 = 0 \wedge$

$\lambda_1 + \mu = 0 \wedge \mu \neq 0$, luego

$$X = (-\mu x - \mu y + a_3 y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x + \mu y + b_2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sea $\varphi: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\varphi(x, y) = (-x - \mu y, -y)$ es un isomorfismo lineal, entonces

$$Y = \varphi_* X(u, v) = (-\mu b_2 v^2 + a_3 v^3) \frac{\partial}{\partial u} + (u - b_2 v^2) \frac{\partial}{\partial v}$$

donde coef $v^2 = -\mu b_2$ en $\frac{\partial}{\partial u}$ y coef $v^2 = -b_2$ en $\frac{\partial}{\partial v}$, son ambos diferentes de cero, luego por [2], el origen es una cúspide [ver fig. 4].

Fig. 4

($\Rightarrow$) $\det DX(0,0) = 0 \wedge \operatorname{tr} DX(0,0) = 0$, pues de lo contrario existe al menos un autovalor no-nulo y el origen no es una "cúspide". Por lo tanto $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0$

Si alguno de los parámetros es nulo entonces

$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$ y $X(x,y) = a_3 y^3 \frac{\partial}{\partial x} + (x+b_2 y^2) \frac{\partial}{\partial y}$ que no es una cúspide por [2].

Lema 1.8. Sea $\mathcal{O}_2 = \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0 \setminus \{(0,0,0)\}$ y $V_2 = \pi^{-1}(\mathcal{O}_2)$, entonces V_2 es un conjunto semi-algebraico de codimensión 2 en $\mathbb{A}_L$, con $b_2 \neq 0$.

Dem. Claramente $\mathcal{O}_2$ es un conjunto semi-algebraico de codimensión 2 en $\mathbb{R}^3$ y como π es algebraica, entonces por [4] se tiene el Lema 1.8.

Lema 1.9. Sea $X \in \mathbb{A}_L$

El origen es una "bicúspide" ssi $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0 \setminus \{(0,0,0)\}$ y $b_2 = 0$ v $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$.

Dem. ($\Leftarrow$) El caso $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$ es la singularidad original y por [3] es una "bicúspide".

Supongamos $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0 \setminus \{(0,0,0)\}$ con $b_2 = 0$. Entonces por el isomorfismo lineal ψ usado en la demostración del Lema 1.7,

$$\psi_* X(u,v) = a_3 v^3 \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}.$$

Además $b_2 = 0$ implica $a_3 \neq 0$ por Def.

2.1. y por [3] el origen es una bicúspide [ver figura 5]

Fig. 5

($\Rightarrow$) $\det DX(0,0) = 0 = \text{tra } DX(0,0)$ pues de lo contrario existe al menos un autovalor no-nulo y el origen no es una "bicúspide", por lo tanto $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0$

Si un parámetro es no-nulo entonces $\lambda_1, \lambda_2, \mu \neq 0$ y si $b_2 \neq 0$, por Lema 1.7, el origen es una cúspide, lo que es una contradicción, por lo tanto $b_2 = 0$.

Si alguno de los parámetros es nulo entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$, pues $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0$

Lema 1.10. Sea $\mathcal{U}'_2 = \Sigma_1^0 \cap \Sigma_2^0 \setminus \{(0,0,0)\}$ y $V'_2 = \pi^{-1}(\mathcal{U}'_2)$.

Entonces V'_2 es un conjunto semi-algebraico de codimensión 2 en X_L con $b_2 = 0$.

Dem. $\mathcal{U}'_2$ es un conjunto semi-algebraico de codimensión 2 en $\mathbb{R}^3$, y como π es algebraica entonces por [4] se tiene el Lema 1.10.

Lema 1.11. Sea $V_3 = \pi^{-1}\{(0,0,0)\}$, entonces V_3 es un conjunto algebraico de codimensión 3 en X_L .

Dem. Trivial.

Teorema 1.1. $X_L = V_0 \overset{\circ}{\cup} V_1 \overset{\circ}{\cup} V \overset{\circ}{\cup} V_3$ donde $V = V'_2$ si $b_2 = 0$ y $V = V_2$ si $b_2 \neq 0$.

Dem. Consecuencia directa de todos los lemas anteriores.

II. En lo que sigue se supone $a_3 > 0$.

Sean $A^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 / \Delta = 0\}$

$A^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 / \Delta = 0\}$

$A^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 / \Delta > 0\}$

claramente $\mathbb{R}^3 = A^- \cup A^0 \cup A^+$.

1.- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^-$ entonces la bicúspide en el origen [3] se bifurca a una única hipérbolica (Lema 1.1.3a).

2.- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0$ entonces por caso 2, $p_0 = (0,0)$ y $p = \frac{b_2 \lambda_1}{2a_3}$
 $(-\mu - \frac{b_2 \lambda_1}{2a_3}, 1)$ con $b_2 \lambda_1 \neq 0$ son las únicas singularidades distintas de $X \in \mathfrak{X}_L$.

Si $b_2 \lambda_1 = 0$ entonces es claro que $p_1 = p_0$.

Para analizar el retrato de fases en vecindades de las singularidades, basta usar los lemas anteriores en p_0 y p_1 respectivamente.

Supongamos $b_2 \neq 0$ y sean

$$A_1^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} > 0 \wedge \lambda_1 \neq 0\}$$

$$A_2^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} < 0 \wedge \lambda_1 \neq 0\}$$

$$A_3^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} = 0 \wedge \lambda_1 \neq 0\}$$

$$H^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 = 0\}$$

entonces es claro que $A^0 = \bigcup_{i=1}^3 A_i^0 \cup H^0$ (ver figura 6)

$$A^0 = \{\Delta = 0\}$$

Fig. 6

pero $\Delta = 0 \Rightarrow \det DX(p) = 0$ y además

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \bigcup_{j=1}^3 A_j^0 \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^- \text{ pues } a_3 > 0.$$

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A_1^0$, entonces la bicúspide [3] se bifurca a una silla hiperbólica en el origen (Lema 1.1) y a una singularidad parcialmente hiperbólica en p_1 con $W^C(p_1)$ cuadrática y $W^u(p_1)$ hiperbólica (Lema 1.3 b en p_1).

Fig. 7

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A_2^0$ entonces la bicúspide [3] se bifurca a una silla hiperbólica en el origen (Lema 1.1) y a una singularidad parcialmente hiperbólica en p_1 con $W^C(p_1)$ cuadrática y $W^S(p_1)$ hiperbólica (Lema 1.3b) en p_1 .

Fig. 8

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A_3^0$ entonces la bicúspide [3] se bifurca a una silla hiperbólica en el origen (Lema 1.1) y a una cúspide en p_1 (Lema 1.7 en p_1).

Partición de H^0 .

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow b_2 \lambda_1 = 0 \Rightarrow p_0 = p_1 \wedge (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0 \wedge \lambda_2 = 0$.

Sean $H_1^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^0 \mid \mu > 0\}$;

$H_2^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^0 \mid \mu = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$

$H_3^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^0 \mid \mu < 0\}$

claramente $H^0 = \bigcup_{j=1}^3 H_j^0 \wedge A^0 = \bigcup_{i=1}^3 A_i^0 \cup \bigcup_{i=1}^3 H_i^0$

- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H_1^0$, entonces la bicúspide [3] se bifurca a una silla no hiperbólica con $W^C(p_0)$ cúbica atractora y $W^S(p_0)$ hiperbólica (Lema 1.3.a.2).
- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H_2^0$, entonces los tres parámetros son nulos y corresponde a la bicúspide original [3].
- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H_3^0$, entonces la bicúspide [3] se bifurca a una silla no hiperbólica con $W^C(p_0)$ cúbica repelente y $W^S(p_0)$ hiperbólica (Lema 1.3.a.1).

Resumiendo, se tiene la siguiente tabla:

	p_0	p_1
A_1^0	silla hiperbólica	parcialmente hiperbólica w^c cuadrática w^u hiperbólica
A_2^0	silla hiperbólica	parcialmente hiperbólica w^c cuadrática w^s hiperbólica
A_3^0	silla hiperbólica	cúspide
H_1^0	silla no hiperbólica w^c cúbica w^u hiperbólica	
H_2^0	bicúspide	
H_3^0	silla no hiperbólica w^c cúbica w^s hiperbólica	

Supongamos $b_2 = 0$ entonces $p_0 = p_1 \wedge A^0 = \Sigma_1^0$

$$\text{Sean } K_1^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 \neq 0\}$$

$$K_2^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^0 \mid \lambda_1 = 0\}$$

entonces $A^0 = \bigcup_{i=1}^2 K_i^0$ y basta analizar la traza en p_0 .

$$\text{Sean } K_{11}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 > 0, \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$K_{12}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 < 0, \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$K_{13}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 > 0, \lambda_1 + \mu < 0\}$$

$$K_{14}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 < 0, \lambda_1 + \mu < 0\}$$

$$K_{15}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 < 0, \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$K_{16}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^0 \mid \lambda_1 > 0, \lambda_1 + \mu = 0\}$$

Además $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^0 \Rightarrow \lambda_2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$

$$\text{Sean } K_{21}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^0 \mid \mu > 0\}$$

$$K_{22}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^0 \mid \mu = 0\}$$

$$K_{23}^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^0 \mid \mu < 0\}$$

es claro que $K_2^0 = \bigcup_{i=1}^3 K_{2i}^0$ y

$$A^0 = \bigcup_{i=1}^6 K_{1i}^0 \cup \bigcup_{i=1}^3 K_{2i}^0 \quad \text{ver figura 9.}$$

Fig. 9

$$A^0 = \sum_1^0$$

Luego, la bicúspide [3] se bifurca a una única singularidad como indica la siguiente table según los lemas anteriores.

K_{11}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica atractora, w^u hiperbólica
K_{12}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica atractora, w^u hiperbólica
K_{13}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica repelente, w^S hiperbólica
K_{14}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica repelente, w^S hiperbólica
K_{15}^0	bicúspide
K_{16}^0	bicúspide
K_{21}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica atractora, w^u hiperbólica
K_{22}^0	bicúspide original
K_{23}^0	silla no hiperbólica w^C cúbica repelente, w^S hiperbólica

3.- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \wedge b_2 \neq 0$, entonces por caso 3, p_0, p_+, p_- son las únicas singularidades de $X \in \mathfrak{X}_L$.

Nótese que:

i) $p_+ = p_- \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$, en consecuencia, $\nexists (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+$

tal que $p_+ = p_- = p_0$

ii) $p_+ = p_0 \neq p_-$, $p_- = p_0 \neq p_+$ pues $\Delta < 0$ y

$$p_{+,-} = p_0 \Leftrightarrow \frac{b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_3} (-\mu - \frac{b_2}{a_3} (b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta}), 1) = (0, 0)$$

$$b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta} = 0$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^0$$

Para analizar el retrato de fases en vecindades de las singularidades, por los Lemas de I, basta hacerlo en $p_{+,-}$

$$\text{Sea } k_{+,-} = \frac{b_2 \lambda_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_3} \in \mathbb{R} \Rightarrow p_{+,-} = k_{+,-} (-\mu - b_2 k_{+,-}, 1)$$

y $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ traslación tal que

$$\tau(u, v) = (u - k_{+,-}(\mu + b_2 k_{+,-}), v + k_{+,-}), \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} X(\tau(u, v)) &= (\lambda_1 u + (\lambda_2 + 3a_3 k_{+,-}^2)v + 3a_3 k_{+,-} v^2 + a_3 v^3) \frac{\partial}{\partial u} \\ &\quad + (u + (\mu + 2b_2 k_{+,-})v + b_2 v^2) \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

en consecuencia:

$$D_{+,-} = \det DX(\tau(u, v))(0, 0) = \lambda_1 \mu - \lambda_2 + k_{+,-} (2\lambda_1 b_2 - 3a_3 k_{+,-})$$

$$D_{+,-} = -\frac{1}{2a_3} \Delta \pm \sqrt{\Delta} b_2 \lambda_1 \quad y$$

$$T_{+,-} = \text{Tr } DX(\tau(u,v))(0,0) = \lambda_1 + \mu + 2b_2k_{+,-}$$

$$\text{Sean } C^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \mid \lambda_1\mu - \lambda_2 \neq 0\} \quad (3 \text{ sing. distintas})$$

$$H^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \mid \lambda_1\mu - \lambda_2 = 0\} \quad (2 \text{ sing. distintas})$$

$$\text{por definici3n } A^+ = C^+ \cup H^+.$$

$$\text{Sean } C_1^+ = C^+ \cap \Sigma_1^-; C_2^+ = C^+ \cap \Sigma_1^+ \quad \text{entonces}$$

$$C^+ = \bigcup_{i=1}^2 C_i^+.$$

$$\text{Sean } C_{21}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_2^+ \mid \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$C_{22}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_2^+ \mid \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$C_{23}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_2^+ \mid \lambda_1 + \mu < 0\}$$

$$\text{Es claro que } C_2^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{2i}^+ \text{ y como } a_3 > 0 \wedge \Delta > 0 \quad \text{entonces}$$

$$\lambda_1\mu - \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow D_{+,-} < 0, \text{ en consecuencia } p_+, p_- \text{ son sill as hiperb3licas.}$$

$$\text{Sean } C_{221}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{22}^+ \mid \lambda_1 < 0\}$$

$$C_{222}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{22}^+ \mid \lambda_1 = 0\}$$

$$C_{223}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{22}^+ \mid \lambda_1 > 0\}$$

$$\text{es claro que } C_{22}^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{22i}^+$$

$$\text{Sean } C_{11}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_1^+ \mid D_+ > 0, D_- < 0\}$$

$$C_{12}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_1^+ \mid D_+ < 0, D_- > 0\}$$

$$\begin{aligned} &\text{Como } \text{In}(p_0) + \text{In}(p_+) + \text{In}(p_-) = 1 \text{ pues } a_3 > 0 \text{ entonces} \\ &\text{In}(p_0) = -1 \wedge \text{In}(p_+) = \text{In}(p_-) \text{ no es posible. Adem3s } (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C^+ \Rightarrow \\ &D_{+,-} \neq 0. \end{aligned}$$

Entonces
$$C_1^+ = \bigcup_{i=1}^2 C_{1,i}^+$$

Sean:

$$C_{111}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{11}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$C_{112}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{11}^+ \mid T_+ = 0\}$$

$$C_{113}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{11}^+ \mid T_+ < 0\}$$

entonces es claro que
$$C_{11}^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{11,i}^+$$

Sean:

$$C_{121}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{12}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$C_{122}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{12}^+ \mid T_- = 0\}$$

$$C_{123}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in C_{12}^+ \mid T_- < 0\}$$

entonces es claro que
$$C_{12}^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{12,i}^+ \quad \text{y en consecuencia:}$$

$$C^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{11,i}^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 C_{12,i}^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 C_{2,i}^+, \text{ donde}$$

$$C_{22}^+ = \bigcup_{i=1}^3 C_{22,i}^+$$

Partición de H^+

Sean
$$H_1^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^+ \mid \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$H_2^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^+ \mid \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$H_3^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in H^+ \mid \lambda_1 + \mu < 0\}$$

entonces es claro que
$$H^+ = \bigcup_{i=1}^3 H_i^+$$

Por otro lado $p_+ = p_0 \neq p_- \Rightarrow \text{sg } \lambda_1 \neq \text{sg } b_2 \Rightarrow D_- < 0$ pues

$D_+ = 0$, en consecuencia en p_- se tiene una silla hiperbólica.

Análogamente si $p_- = p_0 \neq p_+ \Rightarrow D_+ < 0$

pues $D_- = 0 \Rightarrow \text{sg} \lambda_1 = \text{sg} b_2$ y en consecuencia p_+ es una silla hiperbólica.

$$\text{Resumen: } A^+ = \left[\bigcup_{i=1}^3 C_{11i}^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 C_{12i}^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 C_{2i}^+ \right] \cup \bigcup_{i=1}^3 H_i^+$$

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+$ entonces la bicúspide [3] se bifurca según las siguientes tablas:

	p_+	p_0	p_-
C_{111}^+	repulsor hiperbólico	silla hiperbólica	silla hiperbólica
C_{112}^+	foco no hiperbólico	silla hiperbólica	silla hiperbólica
C_{113}^+	atractor hiperbólico	silla hiperbólica	silla hiperbólica
C_{121}^+	silla hiperbólica	silla hiperbólica	repulsor hiperbólico
C_{122}^+	silla hiperbólica	silla hiperbólica	foco no hiperbólico
C_{123}^+	silla hiperbólica	silla hiperbólica	atractor hiperbólico
C_{21}^+	silla hiperbólica	repulsor hiperbólico	silla hiperbólica
C_{22}^+	silla hiperbólica	foco no hiperbólico si $\lambda_1 \neq 0$, centro si $\lambda_1 = 0$	silla hiperbólica
C_{23}^+	silla hiperbólica	atractor hiperbólico	silla hiperbólico
C_{221}^+	silla hiperbólica	foco no hiperbólico repulsor	silla hiperbólica
C_{222}^+	silla hiperbólica	centro	silla hiperbólica
C_{223}^+	silla hiperbólica	foco no hiperbólico atractor	silla hiperbólica

	$P_+ = P_0$	P_-
H_1^+	silla nodo (Lema 1.3.b)	silla hiperbólica
H_2^+	cúspide	silla hiperbólica
H_3^+	silla nodo (Lema 1.3.b)	silla hiperbólica

	$P_- = P_0$	P_+
H_1^+	silla nodo (Lema 1.3.b)	silla hiperbólica
H_2^+	cúspide	silla hiperbólica
H_3^+	silla nodo (Lema 1.3.b)	silla hiperbólica

Supongamos $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \wedge b_2 = 0$ entonces

$$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \mu - \lambda_2 > 0.$$

$$\text{Sean } A_1^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \mid \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$A_2^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \mid \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$A_3^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in A^+ \mid \lambda_1 + \mu < 0\}$$

$$\text{es claro que } A^+ = \bigcup_{i=1}^3 A_i^+$$

Por otro lado $b_2 = 0 \wedge \Delta > 0$ $p_0 \neq p_+ \neq p_- \neq p_0 \wedge D_{+,-} < 0$ y la bicúspide [3] se bifurca según la siguiente tabla:

	p_0	p_+	p_-
A_1^+	repulsor hiperbólico	silla hiperbólica	silla hiperbólica
A_2^+	centro	silla hiperbólica	silla hiperbólica
A_3^+	atractor hiperbólico	silla hiperbólica	silla hiperbólica

Fig. 10

III. En lo que sigue se supone $a_3 < 0$ y por pág. 1 $b_2 \neq 0$.

$$\text{Sean } B^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \Delta < 0\}$$

$$B^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \Delta = 0\}$$

$$B^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \Delta > 0\}$$

claramente $\mathbb{R}^3 = B^- \cup B^0 \cup B^+$

1. Sean $B_1^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^- \mid (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^-\}$

$$B_2^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^- \mid (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+\}$$

$$B_3^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^- \mid (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^0\}$$

por definición : $\bigcup_{j=1}^3 B_j^- \subset B^-$ y además

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^- \Rightarrow b_2^2 \lambda_1^2 - 4a_3 (\lambda_2 - \lambda_1 \mu) < 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 \mu < 0 \text{ pues } a_3 < 0 \quad \therefore (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^+$$

y en consecuencia $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \bigcup_{j=1}^3 B_j^-$, es decir,

$$B^- = \bigcup_{j=1}^3 B_j^- \quad (\text{ver figura 11}).$$

Fig. 11

- Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^-$ entonces la homoclina en el origen [3] se bifurca a un atractor hiperbólico (Lema 1.1b), repulsor hiperbólico (Lema 1.1.c), foco no hiperbólico (Lema 1.4), dependiendo si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B_j^-$, $j = 1, 2, 3$ respectivamente.

2. Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0$ entonces por caso 2, $p_0 = (0,0)$ y

$p_1 = \frac{b_2 \lambda_1}{2a_3}(-\mu - \frac{b_2^2 \lambda_1}{2a_3}, 1)$ con $b_2 \lambda_1 \neq 0$ son las únicas singularidades distintas de $x \in \mathbb{X}_L$.

Si $b_2 \lambda_1 = 0$ entonces, es claro que $p_1 = p_0$. Además $b_2^2 \lambda_1^2 - 4a_3(\lambda_2 - \lambda_1 \mu) = 0 \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 \mu < 0$ pues $a_3 < 0 \Rightarrow B^0 \subseteq \Sigma_1^+ \cup \Sigma_1^0$.

Sean $B_1^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0 \mid b_2 \lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} > 0\}$

$B_2^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0 \mid b_2 \lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} < 0\}$

$B_3^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0 \mid b_2 \lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_1 + \mu + \frac{\lambda_1 b_2^2}{a_3} = 0\}$

$K^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0 \mid b_2 \lambda_1 = 0\} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0 \mid b_2 \neq 0 \wedge \lambda_1 = 0\}$

por definición $\bigcup_{j=1}^3 B_j^0 \cup K^0 = B^0$ y además

$$b_2 \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \bigcup_{j=1}^3 B_j^0 \subseteq \Sigma_1^+$$

Sean $B_{11}^0 = B_1^0 \cap \Sigma_2^+$

$B_{21} = B_2^0 \cap \Sigma_2^+$

$B_{12}^0 = B_1^0 \cap \Sigma_2^0$

$B_{22}^0 = B_2^0 \cap \Sigma_2^0$

$B_{13}^0 = B_1^0 \cap \Sigma_2^-$

$B_{23}^0 = B_2^0 \cap \Sigma_2^-$

$B_{31}^0 = B_3^0 \cap \Sigma_2^+$

$B_{32}^0 = B_3^0 \cap \Sigma_2^0$

$B_{33}^0 = B_3^0 \cap \Sigma_2^-$

luego: $\bigcup_{j=1}^3 B_j^0 = \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{j=1}^3 B_{ij}$

Si $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^0$ entonces $p_0 = p_1$ y consideremos

$$K_1^0 = K^0 \cap \Sigma_2^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^0 \mid \mu > 0\}$$

$$K_2^0 = K^0 \cap \Sigma_2^0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^0 \mid \mu = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

$$K_3^0 = K^0 \cap \Sigma_2^- = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^0 \mid \mu < 0\}$$

claramente $K^0 = \bigcup_{j=1}^3 K_j^0 = \Sigma_1^0 \cap \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \mid \Delta = 0\}$

en consecuencia:

$$B^0 = \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{j=1}^3 B_{ij}^0 \cup \bigcup_{i=1}^3 K_i^0$$

La siguiente table ilustra las bifurcaciones de la homoclina
 [3], cuando $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^0$

	P_0	P_1
B_{11}^0	repulsor hiperbólico	parcialmente hiperbólica W^C cuadrática, W^u hiperbólica
B_{12}^0	foco no hiperbólico	parcialmente hiperbólico W^C cuadrática, W^u hiperbólica
B_{13}^0	atractor hiperbólico	parcialmente hiperbólica W^C cuadrática, W^u hiperbólica
B_{21}^0	repulsor hiperbólico	parcialmente hiperbólica W^C cuadrática, W^s hiperbólica
B_{22}^0	foco no hiperbólico	parcialmente hiperbólica W^C cuadrática, W^s hiperbólica
B_{23}^0	atractor hiperbólico	parcialmente hiperbólica W^C cuadrática, W^s hiperbólica
B_{31}^0	repulsor hiperbólico	cúspide
B_{32}^0	foco no hiperbólico	cúspide
B_{33}^0	atractor hiperbólico	cúspide
K_1^0	repulsor no hiperbólico W^C cúbica repulsora	
K_2^0	homoclina original	
K_3^0	atractor no hiperbólico W^C cuadrática, atractora	

3. Los argumentos en II.3 (pág.) son válidos para $a_3 < 0$.

$$\text{Sean: } E^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^+ \mid \lambda_1\mu - \lambda_2 \neq 0\} \quad (3 \text{ sing} \neq s)$$

$$K^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in B^+ \mid \lambda_1\mu - \lambda_2 = 0\} \quad (2 \text{ sing} \neq s)$$

$$\text{y es claro que } B^+ = E^+ \cup K^+$$

$$\text{Sean } E_1^+ = E^+ \cap \Sigma_1; \quad E_2^+ = E^+ \cap \Sigma_1^+ \text{ entonces}$$

$$E^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_i^+$$

$$\text{Sean } E_{21}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_2^+ \mid \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$E_{22}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_2^+ \mid \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$E_{23}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_2^+ \mid \lambda_1 + \mu < 0\}$$

$$\text{y es claro que } E_2^+ = \bigcup_{i=1}^3 E_{2i}^+$$

$$(*) \text{ pero } a_3 < 0, (\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_2^+ \wedge I(p_0) + I(p_+) + I(p_-) = +1$$

$$\Rightarrow (D_+ > 0 \quad D_- < 0) \vee (D_+ < 0 \wedge D_- > 0)$$

$$\text{Sean } E_{211}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{21}^+ \mid D_+ > 0 \wedge D_- < 0\}$$

$$E_{212}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{21}^+ \mid D_+ < 0 \wedge D_- > 0\}$$

$$\text{entonces por lo anterior } E_{21}^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_{21i}^+$$

$$\text{Sean } E_{2111}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{211}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$E_{2112}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{211}^+ \mid T_+ = 0\}$$

$$E_{2113}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{211}^+ \mid T_+ < 0\}$$

$$E_{2121}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{212}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$E_{2122}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{212}^+ \mid T_- = 0\}$$

$$E_{2123}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{212}^+ \mid T_- < 0\}$$

es claro que

$$E_{211}^+ = \bigcup_{i=1}^3 E_{211i}^+, \quad E_{212}^+ = \bigcup_{i=1}^3 E_{212i}^+ \quad y$$

$$E_{21}^+ = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^3 E_{21ji}^+$$

Partición de E_{22}^+

$$\text{Sean } E_{221}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{22}^+ \mid D_+ > 0 \wedge D_- < 0\}$$

$$E_{222}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{22}^+ \mid D_+ < 0 \wedge D_- > 0\}$$

entonces por (*)

$$E_{22}^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_{22i}^+$$

$$\text{Sean } E_{2211}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{221}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$E_{2212}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{221}^+ \mid T_+ < 0\}$$

El caso $T_+ = 0$ es vacío, pues $b_2 \neq 0 \wedge \lambda_1 \mu - \lambda_2 \neq 0$

$$\text{luego } E_{221}^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_{221i}^+$$

$$\text{Sean } E_{2221}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{222}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$E_{2222}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{222}^+ \mid T_- < 0\}$$

y el caso $T_- = 0$ es vacío por lo anterior, luego, $E_{222}^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_{222i}^+$ y

$$\text{en consecuencia } E_{22}^+ = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^2 E_{22ji}^+$$

Partición de E_{23}^+

$$\text{Sean } E_{231}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{23}^+ \mid D_+ > 0 \wedge D_- < 0\}$$

$$E_{232}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{23}^+ \mid D_+ < 0 \wedge D_- > 0\}$$

entonces por (*)

$$E_{23}^+ = \bigcup_{i=1}^2 E_{23i}^+$$

$$\text{Sean } E_{2311}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{231}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$E_{2312}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{231}^+ \mid T_+ = 0\}$$

$$E_{2313}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{231}^+ \mid T_+ < 0\}$$

$$E_{2321}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{232}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$E_{2322}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{232}^+ \mid T_- = 0\}$$

$$E_{2323}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_{232}^+ \mid T_- < 0\}$$

entonces, es claro que

$$E_{231}^+ = \bigcup_{i=1}^3 E_{231i}^+, \quad E_{232}^+ = \bigcup_{i=1}^3 E_{232i}^+$$

y en consecuencia

$$E_{23}^+ = \bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^3 E_{23ji}^+.$$

Partición de E_1^+

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in \Sigma_1^- \Rightarrow I(p_0) = -1 \text{ y}$$

$$\text{como } I(p_0) + I(p_+) + I(p_-) = +1 \Rightarrow D_+ > 0 \wedge D_- > 0$$

$$\text{Sean } E_{11}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ > 0 \wedge T_- > 0\}$$

$$E_{12}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ > 0 \wedge T_- = 0\}$$

$$E_{13}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ > 0 \wedge T_- < 0\}$$

$$E_{14}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ = 0 \wedge T_- < 0\}$$

$$E_{15}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ = 0 \wedge T_- = 0\}$$

$$E_{16}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ = 0 \wedge T_- < 0\}$$

$$E_{17}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ < 0 \wedge T_- < 0\}$$

$$E_{18}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ < 0 \wedge T_- = 0\}$$

$$E_{19}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E_1^+ \mid T_+ < 0 \wedge T_- < 0\}$$

es claro que

$$E_1^+ = \bigcup_{i=1}^9 E_{1i}^+$$

La siguiente tabla ilustra las bifurcaciones de la homoclina
 [3], cuando $(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in E^+$

	p_0	p_+	p_-
E_{11}^+	sh	repulsor hiperbólico	repulsor hiperbólico
E_{12}^+	sh	repulsor hiperbolico	foco no hiperbólico
E_{13}^+	sh	repulsor hiperbólico	atractor hiperbólico
E_{14}^+	sh	foco no hiperbólico	repulsor hiperbólico
E_{15}^+	sh	foco no hiperbólico	foco no hiperbólico
E_{16}^+	sh	foco no hiperbólico	atractor hiperbólico
E_{17}^+	sh	atractor hiperbólico	repulsor hiperbólico
E_{18}^+	sh	atractor hiperbólico	foco
E_{19}^+	sh	atractor hiperbólico	atractor hiperbólico
E_{211}^+	repulsor hiperbólico	repulsor hiperbólico	sh
E_{212}^+	repulsor hiperbólico	foco no hiperbólico	sh
E_{213}^+	repulsor hiperbólico	atractor hiperbólico	sh
E_{2121}^+	repulsor hiperbólico	sh	repulsor hiperbólico
E_{2122}^+	repulsor hiperbólico	sh	foco no hiperbólico

	P_0	P_+	P_-
E_{2123}^+	repulsor hiperbólico	sh	atractor hiperbólico
E_{2211}^+	foco no hiperbólico	repulsor hiperbólico	sh
E_{2212}^+	foco no hiperbólico	atractor hiperbólico	sh
E_{2221}^+	foco no hiperbólico	sh	repulsor hiperbólico
E_{2222}^+	foco no hiperbólico	sh	atractor hiperbólico
E_{2311}^+	atractor hiperbólico	repulsor hiperbólico	sh
E_{2312}^+	atractor hiperbólico	foco no hiperbólico	sh
E_{2313}^+	atractor hiperbólico	atractor hiperbólico	sh
E_{2321}^+	atractor hiperbólico	sh	repulsor hiperbólico
E_{2322}^+	atractor hiperbólico	sh	foco no hiperbólico
E_{2323}^+	atractor hiperbólico	sh	atractor hiperbólico

Partición de K^+

$$\text{Si } (x_1, x_2, x_3) \in K^+ \Rightarrow x_1 p_- - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = b_2^2 \lambda_1^2 \wedge$$

$$(p_+ = p_0 \neq p_- \vee p_- = p_0 \neq p_+) \wedge \lambda_1 \neq 0. \quad \text{Además}$$

$$D_{+,-} = -\frac{1}{2a_3} (b_2^2 \lambda_1^2 \pm b_2 \lambda_1 - |b_2 \lambda_1|)$$

$$T_{+,-} = \lambda_1 + \mu + \frac{b_2}{a_3}(b_2\lambda_1 \pm |b_2\lambda_1|)$$

$$\text{Sean } K_1^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^+ \mid \lambda_1 + \mu > 0\}$$

$$K_2^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^+ \mid \lambda_1 + \mu = 0\}$$

$$K_3^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K^+ \mid \lambda_1 + \mu < 0\}$$

claramente $K^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_i^+$ y se presentan dos casos dependiendo del signo de b_2 .

$$\text{Sean } K_{11}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^+ \mid \lambda_1 > 0\}$$

$$K_{12}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_1^+ \mid \lambda_1 < 0\}$$

$$K_{21}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^+ \mid \lambda_1 > 0\}$$

$$K_{22}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_2^+ \mid \lambda_1 < 0\}$$

$$K_{31}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_3^+ \mid \lambda_1 > 0\}$$

$$K_{32}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_3^+ \mid \lambda_1 < 0\}$$

claramente $K_i^+ = \bigcup_{j=1}^2 K_{ij}^+ \quad i = 1, 2, 3$, entonces

Caso 1. Supongamos $b_2 > 0$

$$\text{Sean } K_{111}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$K_{112}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_+ = 0\}$$

$$K_{113}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_+ < 0\}$$

claramente $K_{11}^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{11i}^+ \quad y$

$$K_{321}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$K_{322}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_- = 0\}$$

$$K_{323}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_- < 0\}$$

entonces

$$K_{32}^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{32i}^+$$

luego

$$K^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{11i}^+ \cup K_{12}^+ \cup \bigcup_{i=1}^2 K_{2i}^+ \cup K_{31}^+ \cup \bigcup_{i=1}^1 K_{3i}^+$$

y la homoclina [3] se bifurca según la siguiente tabla usando $D_{+,-}$ y $T_{+,-}$ según el caso.

	P_0	P_+	P_-
K_{111}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u hi perbólica	repulsor hiperbólico	
K_{112}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u hi perbólica	foco no hiperbólico	
K_{113}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u hi perbólica	atractor hiperbólico	
K_{12}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u hi perbólica		repulsor hiperbólico
K_{21}^+	cúspide	atractor hiperbólico	
K_{22}^+	cúspide		repulsor hiperbólico
K_{31}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^s hi perbólica	atractor hiperbólico	
K_{321}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^s hi perbólica		repulsor hiperbólico
K_{322}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^s hi perbólica		foco no hiperbólico
K_{323}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^s hi perbólica		atractor hiperbólico

Caso 2. Supongamos $b_2 < 0$

$$\text{Sean } K_{111}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_- > 0\}$$

$$K_{112}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_- = 0\}$$

$$K_{113}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{11}^+ \mid T_- < 0\}$$

claramente

$$K_{11}^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{11i}^+ \quad \text{y}$$

$$K_{321}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_+ > 0\}$$

$$K_{322}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_+ = 0\}$$

$$K_{323}^+ = \{(\lambda_1, \lambda_2, \mu) \in K_{32}^+ \mid T_+ < 0\}$$

claramente

$$K_{32}^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{32i}^+$$

$$\text{luego, } K^+ = \bigcup_{i=1}^3 K_{11i}^+ \cup K_{12}^+ \cup \bigcup_{i=1}^2 K_{2i}^+ \cup K_{31}^+ \cup \bigcup_{i=1}^3 K_{32i}^+$$

y la homoclina $\{3\}$ se bifurca según la siguiente tabla usando $D_{+,-}$ y $T_{+,-}$ según el caso.

	P_0	P_+	P_-
K_{111}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u <u>hi</u> perbólica		repulsor hiperbólico
K_{112}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u <u>hi</u> perbólica		foco no hiperbólico
K_{113}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u <u>hi</u> perbólica		atractor hiperbólico
K_{12}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^u <u>hi</u> perbólica	repulsor hiperbólico	
K_{21}^+	cúspide		atractor hiperbólico
K_{22}^+	cúspide	repulsor hiperbólico	
K_{31}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^S <u>hi</u> perbólica		atractor hiperbólico
K_{321}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^S <u>hi</u> perbólica	repulsor hiperbólico	
K_{322}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^S <u>hi</u> perbólica	foco no hiperbólico	
K_{323}^+	silla nodo W^C cuadrática, W^S <u>hi</u> perbólica	atractor hiperbólico	

BIBLIOGRAFIA.

- [1] V. ARNOLD. Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires. Editions MIR. Moscou.
- [2] D. K. ARROWSMITH. The Singularity $x \frac{\partial}{\partial y}$,
Journal of Differential Equations, Vol. 54 N° 2 (1979).
- [3] J. BILLEKE, E. SAEZ, M. CAÑAS. On the stability of the singularity $x \frac{\partial}{\partial y}$ in codimension three. Preprint.
- [4] SEIDENBERG-TARSKI. Lecture Notes 162.
- [5] F. TAKENS. Forced Oscillations and Bifurcations. In: Applications of Global Analysis I. Communications of the Mathematical Institute te Rijksuniversiteit Utrecht 3 (1974).
- [6] F. TAKENS. Singularities of vector fields. I.H.E.S. 43, 1974.
- [7] O. PLAAT. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Reverté, S.A., 1974.