DOI: 10.22199/S07160917.1983.0005.00010

REVISTA PROYECCIONES: 201-241.
JORNADAS MATEMATICAS, AGOSTO 1983.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD SEGÚN VON MISES

DR. ARNOLDO PRADO CAMPOS*

---

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

INTRODUCCION.

Quizás la siguiente frase atribuida a R. Von Mises ponga de manifiesto el substrato de la concepción de probabilidad para este matemático. En una de sus obras dice, "... la probabilidad del suceso" ocurre la faz 3 de un dado", es tan propia del dado como lo es su densidad...". Aquí se revela el carácter fuertemente experimental que Von Mises atribuye a la probabilidad. Así como no tiene sentido hablar de densidad como una función aditiva, no negativa, etc., etc., sino no se acompaña de un método para la verificación experimental de las afirmaciones, así tampoco tiene sentido definir la probabilidad como una función sobre el σ-cuerpo correspondiente a la gama de resultados posibles en un experimento aleatorio, sino se acompaña el modelo matemático, con

---

* Profesor Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Universidad del Norte.

un modelo experimental que permita verificar los resultados.

Naturalmente Von Mises construye su teoría por la vía matemática y por lo tanto no negando su origen, todos los conceptos y sus relaciones, serán entes abstractos o idealizaciones de lo que es observable experimentalmente.

Toda su concepción parte de la posibilidad formal de realizar infinitas veces un experimento bajo las mismas condiciones. Es evidente que una posibilidad formal debe estar acompañada de la suficiente convicción experimental para que el juicio sobre el valor de la probabilidad de un suceso pueda aceptarse sin reticencias.

1.1. DEFINICION: RESULTADO Y ESPACIO MUESTRAL.

Para un experimento aleatorio cada observación posible se denomina resultado del experimento. En correspondencia con los resultados distintos, posibles, de un experimento, se asocia un elemento de un espacio. El elemento se denomina atributo del resultado y el conjunto de atributos se denomina espacio muestral.

1.2. SUPOSICIONES BASICAS.

1.2.1. Definición: Frecuencia.

Sea S un espacio muestral finito $S = \{a_i\}_{i=1}^{k}$.

Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de S, de modo que los primeros n elementos de la sucesión correspondan a n repeticiones idénticas del experimento que se analiza. Sea a_{i_0} un atributo fijo y sea

n_{i_0} el número de veces que figura a_{i_0} en los primeros elementos de la sucesión. Entonces n_{i_0}/n se denomina frecuencia relativa del atributo a_{i_0}.

1.2.2. Primera Suposición: Convergencia de las frecuencias relativas.

Para todo experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada atributo converge a un real definido, cuando el número de repeticiones del experimento se hace infinitamente grande.

Es claro que para un espacio muestral finito se cumplirá que, si k es el número de atributos en él, entonces,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1$$

Para el caso general se agregará a la primera suposición que para todo espacio muestral se cumplirá que:

$\sum_{i} \frac{n_i}{n} = 1$ (i, subíndice de los atributos en S).

1.2.3. Definición: Selección de lugar.

Sea S un espacio muestral y $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de atributos. Entonces se denomina "Operación de Selección de Lugar", o bien "Selección de Lugar", a un conjunto de funciones que opera, cada una, sobre un elemento de $\{x_j\}$, con la siguiente caracterización:

1° el conjunto de funciones $\Gamma = \{f_j\}$ genera necesariamente una subsucesión de $\{x_j\}$.

2° para cada valor de j la función f_j depende de j y de los j-1 atribu

tos anteriores a x_j y no depende del atributo x_j ni de los siguientes atributos.

3° $f_j = 1 \iff x_j$ es retenido por la subsucesión.

$f_j = 0 \iff x_j$ no es retenido por la subsucesión.

1.2.4. Segunda Suposición: Invarianza de las frecuencias con respecto a las selecciones de lugar.

Las sucesiones de atributos sobre las cuales es posible basar una concepción de probabilidad serán aquellas que, satisfaciendo la primera suposición son, con respecto a la convergencia de las frecuencias relativas, invariantes bajo la operación de selección de lugar. Es decir, si $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de atributos y $\{f_j\}$ una selección de lugar, entonces si para el atributo a_i se tiene, en la sucesión $\{x_j\}$, que $\lim_{n\to\infty} n_i/n = p_i$, se tendrá en la sucesión $\{f_j\ (x_j)\}$ que la frecuencia relativa del atributo a_i será también p_i.

El tipo de sucesiones para las cuales son válidas la primera y segunda suposición se denominarán sucesiones aleatorias.

Ejemplo: Sea E el experimento consistente en el lanzamiento de un dado. Sea S = 0,1 . Una sucesión aleatoria podría ser por ejemplo: 010011110101010010 ...

Una sucesión definida a priori no es aleatoria.

Por ejemplo que siga la ley de formación: 01 00 11 000 111 0000 1111 etc. ...

Tampoco será aleatoria la sucesión generada a partir de una que sea aleatoria, mediante un artificio aritmético.

Por ejemplo, de la sucesión aleatoria:
0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 , se puede obtener la sucesión $\{y_j\}$ en que $y_j = x_{j-1} + X_j$ con $x_j = 0, 1$; $j = 2, 3, \ldots$; $y_1 = x_1 = 0$. Esto es la sucesión: 0 1 1 0 1 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 ...

Es claro que para esta nueva sucesión se puede suponer que fue generada por un experimento para el cual el espacio muestral es $S = \{0, 1, 2\}$. Naturalmente en esta sucesión nunca el 0 procederá al 2 ni viceversa. Luego, no es aleatoria.

Conviene observar que el criterio de aleatoriedad es esencialmente un asunto de génesis de una sucesión a partir de un hecho experimental que reúne ciertas características muy especiales, entre las cuales, la que imprime el sello, es la que afirma la posibilidad formal de realizar el experimento indefinidamente.

1.2.5. <u>Definición</u>: Colectivo. Probabilidad.

Sean:

α) $S = \{a_i\}$ un espacio muestral

β) $K = \{x_j\}$ una sucesión de elementos de S

γ) $G = \{\Gamma \mid \Gamma$ es una selección de lugar$\}$

G cerrado para la operación de composición de funciones.

Si:

1° Para cada resultado a_i está definido, en K, el $\lim\limits_{n\to\infty} n_i/n = p_i$

2° $\sum\limits_i p_i = 1$

3° $\forall\, \Gamma \in G$, $\Gamma(K) = \{x_{j_\alpha}\}$ es una subsucesión para la cual existe, para a_i, el límite de su frecuencia relativa y el valor del límite es también p_i.

Entonces:

I) K se denomina colectivo con respecto a G y S y se anota K(G, S).

II) p_i se denomina la probabilidad del resultado a_i y se anota $p(a_i)$.

III) $\{p(a_i)\}$ se denomina distribución de probabilidad sobre el espacio muestral S.

1.3. OPERACIONES DEFINIDAS SOBRE COLECTIVOS.

1.3.1. Proposición: Generación de un colectivo por selección de lugar.

Sea K(G, S) un colectivo y $\Gamma \varepsilon G$ una selección de lugar. Entonces $K! = \Gamma(K)$ es un colectivo.

Demostración. Obvia, pues es consecuencia directa de la definición de colectivo.

1.3.2. Definición: Mezcla. Probabilidad.

Sea $K_0(G, S)$ un colectivo y $A = \{a_1, \ldots. a_\ell\}$ un subconjunto de S. Sea K la sucesión generada a partir de K_0 mediante la substitución de cada uno de los elementos de K_0 que pertenecen a A, por el elemento b. Entonces el proceso que genera a K se denomina mezcla de los elementos de A.

De acuerdo a la definición anterior K es un colectivo y se anota K(G, S).

Bajo el supuesto que el número de elementos en A es finito, se tendrá, si n_i es el número de veces que aparece el atributo

$a_i (i = 1, \ldots, \ell)$, en los primeros n elementos de K_0 y n_b el número de veces que aparece b en K, entonces:

$$n_b = \sum_{i=1}^{\ell} n_i$$

$$\therefore \quad \frac{n_b}{n} = \sum_i \frac{n_i}{n}$$

Por lo tanto, se tendrá también:

$$p\ (b) = \sum_{i=1}^{\ell} p\ (a_i)$$

Este valor se denomina "probabilidad del "suceso A" y se anota p (A).

En el caso general, cuando A contiene un número infinito pero contable de elementos, se define p(A) como el límite al cual converge

$$\sum_{a_i \varepsilon A} p(a_i)$$

Una forma equivalente pero, en términos más generales de la operación de mezcla, es la siguiente:

1.3.2'. Definición: Mezcla. Probabilidad.

Sea K_0 (G, S) un colectivo con distribución de probabilidad $\{p(a_i)\}$. Sea $\mathcal{S} = \mathcal{P}^*(S)$, el conjunto de partes de S.

Sea n_i el número de veces que aparece el atributo identificado con el subíndice i, en los primeros n elementos de K_0. Sea I el conjunto de índices de los atributos que están en el subconjunto A de S. Entonces el valor, p(A), al cual converge

$$\sum_{i \varepsilon I} \frac{n_i}{n}$$

se denomina probabilidad de A (suceso A) y la substitución de los elementos de K_0 que están en A, por el elemento b se denomina operación de mezcla de los elementos de A y el resultado de la operación es un colectivo.

1.3.2.1. Propiedades de la función Probabilidad.

Según la definición anterior para cada $A \varepsilon \mathcal{S}$ está definido un número real y tal que se cumplen las siguientes propiedades:

1°) $p(S) = 1$

2°) $(A_1, A_2 \varepsilon \mathcal{S}, A_1A_2 = \phi) \Longrightarrow p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2)$

3°) $(\{A_i\}_{i \varepsilon \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}, A_iA_j = \Phi, i \neq j) \Longrightarrow p(\sum_i A_i) = \sum_i p(A_i)$

De estas proposiciones solamente la 3°) requeriría una verificación. Es claro que de acuerdo a la definición de los números $p(A_i)$ se cumplirá que para cada subconjunto de S existirá su correspondiente probabilidad; en particular para $\sum_i A_i$. Además para los primeros n elementos de un colectivo K_0 (G, S) se cumplirá obviamente

$$n_\Sigma = n_{A_1} + \ldots + n_{A_1} + \ldots,$$

en que

$$n_\Sigma \text{ y } n_{A_1}, i \varepsilon \mathbb{N},$$

representan los números de veces que aparecen los atributos de ΣA_i y de los A_i, respectivamente. Finalmente $n_\Sigma / n = \sum_i n_{A_i} / n$, converge a $p(\Sigma A_i)$ y cada n_{A_1} / n converge a $p(A_i)$.

Así pues de 1°), 2°), 3°) resulta que la función que le asigna a cada subconjunto de S un número real llamado la probabilidad de este conjunto, es una función σ-aditiva, sobre el σ-cuerpo $\mathcal{S} = \mathcal{P}^*$ (S). También por ser este σ-cuerpo monótono también tendrá la propiedad de la clausura para la operación de límites y por lo tanto la función p, también estará definida sobre los subconjuntos de S que son límites de sucesiones monótonas.

1.3.3. Definición: Partición.

Sea K_0 (G, S) un colectivo y A ⊂ S. Entonces, si K es la sucesión obtenida de K_0 mediante la eliminación de los elementos que no pertenecen a A, se dirá que K se obtuvo de K_0 mediante una partición de K_0 según A.

1.3.3.1. Caracterización de la probabilidad condicional.

En las condiciones de la definición anterior se tendrá:

1°) K(G, A) es un colectivo.

2°) Existe una función, p_A , tal que para todo B, subconjunto de A, $p_A(B)$ es una probabilidad en K, siempre que $p(A) \neq 0$ en K_0.

3°) $p_A(B) = p(B) / p(A)$, con p función probabilidad en K_0. El valor $p_A(B)$ se denomina "probabilidad condicional de B dado A".

La demostración del enunciado anterior sigue la línea de la demostración del teorema 1.3.4.1. y se omite.

1.3.4. Definición: Combinación de colectivos.

Sean:

- $K_0(G, S)$ un colectivo
- $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, dos sucesiones de enteros tales que:
  $1 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \ldots < \alpha_1 < \beta_i \ \ldots$
- $\Gamma_1 \varepsilon G$ y $\Gamma_2 \ \varepsilon G$ definidas por $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$ respectivamente. Sean x_{β_i} y x_{α_i} los elementos de K_0 seleccionados por cada selección de lugar.

Sean:

- $K_1 = \{x_{\alpha_i}\}$
- $K_2 = \{x_{\beta_i}\}$
- $K = \{(x_{\alpha_i}, x_{\beta_i})\}$

Entonces K se denomina "la combinación de K_1 y K_2".

1.3.4.1. Teorema.

Sean K_0, K_1, K_2, K como en la definición anterior.

Sea p una distribución de probabilidad en K_0. Entonces:

1° p es una distribución de probabilidad en K_1 y en K_2.

2° $a \varepsilon K_1$ y $b \varepsilon K_2 \Longrightarrow p(a).\ p(b)$ define una probabilidad en K, que se anota $p(a,b) = p(a)\ p(b)$.

3° K es un colectivo.

Demostración (Ejercicio).

1.4. COLECTIVOS INDEPENDIENTES Y REGLA DE LA MULTIPLICACION.

1.4.1. Definición: Independencia.

Se dirá que el colectivo K_2 es independiente del colectivo K_1 si para la combinación de K_1 y K_2 se cumple que $p(a,b) = p'(a)\ p''(b)$. En que p es probabilidad en K, p' probabilidad en K_1 y p" probabilidad en K_2.

Es claro que si K_2 es independiente de K_1, entonces K_1 lo es de K_2. Es decir K_1 y K_2 son mutuamente independientes.

1.4.2. Definición: Colectivos dependientes.

Sean K_1 y K_2 dos colectivos tales que:

- en K_1 está definida una función probabilidad p'
- para cada $x \in K_1$ está definida una función de probabilidad en K_2. Sea $K_2(x)$ el colectivo cuya función de probabilidad depende del valor x escogido en K_1. Sea $p''(\cdot|x)$ esta función.

Si:

- K es la sucesión formada por las duplas (x, y) con $x \in K_1$, $y \in K_2(x)$.
- p' y $p''(\cdot|x)$ son invariantes bajo las operaciones de cambio de lugar en K.

Entonces K es un colectivo y se dirá que K_1 y $K_2(x)$ son combinables e interdependientes y $p'(x) \cdot p''(y|x)$ es una distribución de probabilidad en K que se anota p(x, y), es decir $p(x, y) = p'(x)\ p''(y|x)$.

Ejemplo: La sucesión que se indica fue generada por el lanzamiento de una moneda para la cual las posibilidades de cara son las mis

mas que para sello. El espacio muestral asociado es $S = \{0, 1\}$.

$K = 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \ldots$

Sea ahora la sucesión $K' = \{y_j\}$, definida por:

$y_j = x_j + x_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Esto es:

$K' = 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 1 \ldots$

Sean u, v dos elementos consecutivos de K'. Entonces el valor de p(u, v) dependerá del valor que asuma u.

Efectivamente:

$$p(u) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } u = 0 \quad (0 = 0 + 0) \\ 1/2 & \text{si } u = 1 \quad (1 = 0 + 1 = 1 + 0) \\ 1/4 & \text{si } u = 2 \quad (2 = 1 + 1) \end{cases}$$

$$p(v|0) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } v = 0 \\ 1/2 & \text{si } v = 1 \\ 0 & \text{si } v = 2 \end{cases}$$

$$p(v|1) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } v = 0 \\ 1/2 & \text{si } v = 1 \\ 1/4 & \text{si } v = 2 \end{cases}$$

$$p(v|2) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0 \\ 1/2 & \text{si } v = 1 \\ 1/2 & \text{si } v = 2 \end{cases}$$

$$p(u,v) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } (u,v) = (0,0),(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),(2,2) \\ 1/4 & \text{si } (u,v) = (1,1) \\ 0 & \text{si } (u,v) = (0,2),(2,0) \end{cases}$$

La explicación es obvia.

2. ESPACIOS MUESTRALES ARBITRARIOS.

2.0. INTRODUCCION.

En la parte primera se ha caracterizado el concepto de colectivo para el caso de un espacio muestral finito o bien numerable. En tal situación fue posible construir una función de conjuntos que operaba sobre el -cuerpo minimal definido por el espacio muestral. Se puede observar que esta construcción concuerda con la concepción axiomática, basada en la teoría de la medida y formulada por Kolmogorov. Corresponde ahora generalizar el espacio muestral al caso no numerable. Podría suponerse que una generalización de esta naturaleza debiera implicar un alejamiento de la base experimental señalada en el caso anterior. Sin embargo, no es así. Por el contrario, la exigencia experimental en esta nueva situación es tanto o más fuerte que antes. Así lo sostiene Von Mises al afirmar que:

" para cualquier enunciado concerniente a probabilidades, debe existir, a lo menos conceptualmente, una verificación, tan aproximada como se desee, mediante algún experimento frecuentista".

Para lograr establecer una teoría aceptable desde el punto de vista matemático, construye Von Mises toda una sucesión de conceptos, remontándose cada vez más al plano de la abstracción a partir del plano básicamente instuitivo.

2.1. CONJUNTOS FUNDAMENTALES.

2.1.1. Definición: Espacio de sucesiones.

Sea S un espacio muestral para un experimento determinado. Entonces se llama espacio de sucesiones al conjunto de todas las sucesiones posibles que se puede formar con los elementos de S. Se anota B.

Los elementos de B se denominan puntos.

2.1.2. Definición: Conjunto básico de orden n.

Sea B un espacio de sucesiones. Entonces un conjunto básico de orden n es el conjunto de todas las sucesiones en B que tienen en común los primeros n elementos.

Por ejemplo, si S = 1, 2, 3, 4, 5, 6 se tendrá que B es el conjunto de todas las sucesiones $\{x_j\}$ en que x_j es uno de los elementos de S. Un conjunto básico de orden 3 será 2, 5, 6, x_4, x_5, x_6,...., en que x_j, para $j \geq 4$, es cualquiera de los números de S.

Un conjunto básico se representa por los elementos comunes de las sucesiones, encerrados en un paréntesis. Así en el ejemplo anterior es (2, 5, 6).

Es evidente que existe un isomorfismo entre el espacio muestral de n-tuplas y el conjunto de los conjuntos básicos de orden n. Este isomorfismo permite "identificar" los elementos de S_n con los conjuntos básicos en B. Así en el ejemplo anterior se tendrá que sólo existirán 6^3 conjuntos básicos de orden 3.

Un conjunto básico de orden n se dirá acotado si $n < n_0$, fijo n_0.

2.1.2.1. Definición: Vecindad.

El conjunto de las sucesiones que forman un conjunto básico se denomina vecindad, de cada uno de sus puntos, en B.

Es evidente que dos vecindades en un mismo espacio de sucesiones o bien coinciden o son disjuntas.

2.1.2.2. Proposición.

Sea E un conjunto básico de orden n en B. Entonces existen en B conjuntos básicos de orden $m > n$ y tales que E es la "suma" de ellos.

Demostración: Sea $E = (a_1 \ldots a_n)$. Para cada $x \in S$ sea $E_x = (a_1 \ldots a_n, x)$. Entonces es claro que $E = \sum_{x \in S} E_x$. Si E no es de orden acotado el proceso así definido puede continuarse hasta encontrar los conjuntos básicos de orden m. Es obvio que la validez del teorema para los distintos valores de n dependerá de la cota n_0 para el orden de los conjuntos básicos.

Así por ejemplo en el caso del lanzamiento de un dado se tendrá:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(2,3) = (2,3,1) + (2,3,2) + (2,3,3) + (2,3,4) + (2,3,5) + (2,3,6)$$

2.1.3. "Topología" en B.

2.1.3.1. Definición: Conjunto abierto.

La "suma" de vecindades se denominará conjunto abierto. El conjunto de puntos de B que no están en un conjunto abierto se denomina conjunto cerrado. Es decir, un conjunto es cerrado si es el complemento en B de un conjunto abierto y recíprocamente.

2.1.3.2. Proposición.

a) La suma de cualquier número de abiertos es un abierto.
b) El producto de un número finito de abiertos es un abierto.
c) El producto de un número cualquiera de cerrados es un cerrado.
d) La suma de un número finito de cerrados es un cerrado.

e) M incluido en N, entonces:

- M cerrado, N abierto $\Longrightarrow$ M - N cerrado
- M abierto, N cerrado $\Longrightarrow$ M - N abierto

Demostración (Ejercicio).

2.1.4. Definición: α - conjuntos.

Sea B un espacio de sucesiones y A un conjunto de elementos de B. Entonces se dirá que A es un α-conjunto si A y su complemento A' son sumas de conjuntos básicos.

Ejemplos: Para el espacio B correspondiente al espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} el conjunto A = (3) es un α -conjunto pues su complemento A' = B- A = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6), es suma de conjuntos básicos.

Los conjuntos de S_n y T son también α-conjuntos.

2.1.4.1. Proposición: Caracterización de un α-conjunto.

Un conjunto A es un α-conjunto si y solo si A es un abierto y un cerrado en la topología de B.

Demostración.

$$1^\circ \quad \begin{cases} A, \ \alpha\text{-conjunto} \Longrightarrow A' \text{ es abierto} \Longrightarrow A \text{ cerrado} \\ A, \ \alpha\text{-conjunto} \Longrightarrow A \text{ abierto} \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} A \text{ cerrado} \Longrightarrow A' \text{ abierto} \Longrightarrow A' = \Sigma \text{ Vecindades} \\ A \text{ abierto} \Longrightarrow A = \Sigma \text{ Vecindades} \end{cases}$$

$\} \Longrightarrow$ A, α-conjunto

2.1.5. Definición: El cuerpo F_0.

Sea B un espacio de sucesiones. Entonces el conjunto de todos los α-conjuntos en B se denomina cuerpo F_0.

Tal denominación obedece a la razón obvia, el "cuerpo F_0" es efectivamente un cuerpo. Es decir los -conjuntos satisfacen las dos propiedades:

1° M y $N \in F_0 \Longrightarrow (M + N) \in F_0$

2° M y $N \in F_0$, N incluido en $M \Longrightarrow M - N \in F_0$.

Efectivamente,

M y $N \in F_0 \Longrightarrow M$ y N abiertos y cerrados
$\Longrightarrow M + N$ abierto y cerrado
$\Longrightarrow M + N \in F_0$

N incluido en M; $M, N \in F_0 \Longrightarrow M - N$ abierto y cerrado
$\Longrightarrow M - N \in F_0$

2.1.6. Definición: Forma normal de un conjunto básico.

Sean $E_1, E_2, \ldots,$ conjuntos básicos en B tales que $M = E_1 + E_2 \ldots \in B$. Entonces si los conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ son los conjuntos básicos de menor orden y disjuntos en B, se dirá que M está expresado en la forma normal. Es evidente que dado M existe un único sistema de conjuntos básicos que expresan a M en su forma normal, pues los conjuntos básicos o son coincidentes o uno está contenido en otro o son disjuntos. Así pues si E_i es uno de los sumandos en una forma normal de M y E'_j es uno de los sumandos de otra forma normal de M, entonces E_i está en alguno de los E'_j o E'_j en alguno de los E_i lo que es contrario a la definición de forma normal pues tanto los $E_1, E_2, \ldots$

como los E_1', E_2' ,.... no están incluidos en ningún conjunto básico de amplitud mayor que la propia.

Ejemplo: Sea B* el espacio de sucesiones de dígitos positivos. Defina el siguiente conjunto M.

$$M = (1248) + (124) + (59326) + (174205) + (251) + (5932)$$

Se observa que: $(1248) \subset (124)$

$(59326) \subset (5932)$

Luego se podrá escribir:

$$M = (124) + (174205) + (251) + (5932)$$

Esta expresión es la expresión normal para M.

2.1.7. Definición: El cuerpo F.

Un α-conjunto se dirá que es acotado de orden n si n es el más alto orden de los conjuntos básicos de la forma normal del α-conjunto. El conjunto de los α-conjuntos de orden n se anota f_n. En estas condiciones se denomina "cuerpo F" al conjunto de los α-conjuntos que pertenecen a algún f_n, $n \in N$.

Es decir $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

2.1.7.1. Proposición: f_n es un cuerpo.

1°) Sea $A = \sum_i E_i^{(n)} + \sum_j L_j^{(n_j')}$, en la forma normal.

Con $E_i^{(n)}$ conjuntos básicos de orden n y $L_j^{(n_j)}$ conjuntos básicos de orden n y L_j conjuntos básicos de orden $n_j' < n$.

Por hipótesis $n'_j < n$ y todos los sumandos son disjuntos.

Es claro que no todos los conjuntos básicos de orden n que son subconjuntos del espacio de sucesiones, B, forman parte de A, pues, de otro modo, A sería el espacio total B. Así pues hay un conjunto básico de orden n que forma parte del complemento de A con respecto a B.

Sea pues, $A' = \sum_h E_h^{(n)} + \sum_k H_k^{(n_k)}$. Luego, A' será un miembro de f_n si todos los n_k satisfacen la desigualdad: $n_k < n$. Efectivamente si algún n_k es mayor que n, entonces el correspondiente conjunto básico estará incluido en alguno de orden n, luego necesariamente estará incluido en A, pues no lo puede estar en A' dado que los conjuntos básicos en la forma normal de A' son disjuntos. Esta situación es absurda por dos razones, una porque A y A' son disjuntos y otra porque en A no puede, en su forma normal, contener ningún básico de orden superior a n.

Así pues, A' es también, en su forma normal, acotado de orden n y por lo tanto es un miembro de f_n.

2°) Es claro que la suma de dos α-conjuntos acotados es también un α-conjunto del mismo orden.

Finalmente de 1°) y 2°) se concluye que f_n es cuerpo.

2.1.7.2. <u>Proposición</u>: F es un cuerpo.

<u>Demostración</u>:

1°) $A \varepsilon F \Longrightarrow [(\exists n_0)\ (n \geq n_0 \Longrightarrow A \varepsilon f_n)] \Longrightarrow (\forall n \geq n_0)\ [(A' \varepsilon f_n) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow A' \varepsilon F]$

2°) $A, B \varepsilon F \Longrightarrow A + B \varepsilon F$, obviamente.

2.1.7.3. Proposición: F no es σ-cuerpo.

Demostración:

1°) Es claro que f_n está contenido en f_{n+1} pues cada conjunto básico de orden n es expresable en términos de una suma de conjuntos básicos de orden n+1.

2°) Como consecuencia del punto anterior se cumple que F es el conjunto potencia de un conjunto contable y por lo tanto es no contable. Luego no será un σ-cuerpo.

2.2. ASIGNACION DE PROBABILIDADES EN B.

2.2.1. Definición: Contenido de un conjunto básico.

Sea B el espacio de sucesiones. Sea (i) un conjunto básico de orden 1 en B con $i \in \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$. (Es decir el espacio muestral es un conjunto de enteros). Entonces se denomina "contenido de los conjuntos básicos de orden 1" a los números $P(E^i) > 0$, $i \in N_1$ y tales que:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_1} P(E^i) = 1$$

Es claro que esta definición es esencialmente una traducción al lenguaje de conjuntos básicos de la definición de función probabilidad sobre el espacio muestral. Naturalmente la notación $P(E^i)$ para indicar el contenido del conjunto básico (i), $i \in \mathbb{N}_1$, es para facilitar la aplicación de la descomposición de un conjunto básico en sumandos. Con esta notación es claro que

$$B = \sum_{i \in \mathbb{N}_1} (i) = \sum_{i \in \mathbb{N}_1} E^i \quad \text{y por tanto } P(B) = 1$$

Así pues aplicando las reglas de las operaciones sobre colectivos se tendrá:

$$- E^{r} = \sum_{s} E^{rs} \Longrightarrow P(E^{r}) = \sum_{s} P(E^{rs})$$

$$- E^{rs} = \sum_{t} E^{rst} \Longrightarrow P(E^{rs}) = \sum_{t} P(E^{rst})$$

2.2.2. Definición: Probabilidades para los α-conjuntos.

- Caso espacio muestral finito. En tal caso el número de conjuntos básicos de orden máximo es finito y por lo tanto cada α-conjunto será una suma finita de tales conjuntos. Es decir $A \varepsilon F \Longrightarrow$

$$A = \sum_{i=1}^{k} E_i \Longrightarrow B - A = A' = \sum_{j=1}^{k'} H_j$$

En tales condiciones se definirá la función probabilidad sobre el conjunto F, de los α-conjuntos, como la función que asigna a cada α-conjunto la suma de las probabilidades de los subconjuntos de S_n que son isomorfos con los correspondientes conjuntos básicos.

Ejemplo: Sea $S_2 = \{(0, 0), (0,1), (1, 0), (1, 1)\}$

$$A = (0, 0) + (0, 1) \Longrightarrow P(A) = P(0, 0) + P((0, 1))$$

Obviamente (0, 0) en S_2 es un par ordenado y (0, 0) en B es el conjunto de sucesiones cuyos dos primeros términos son 0, 0 y los restantes términos son ceros o unos.

- Caso de un espacio muestral infinito- contable. Para este caso cada α-conjunto de orden acotado será la suma contable de conjuntos básicos de orden máximo n. Sea K' el colectivo n-dimensional cuyo espacio muestral subyacente son infinitas n-uplas. En tales condiciones la función probabilidad sobre el cuerpo F se define como la función que a cada α-conjunto le hace corresponder la suma de las probabili-

dades de los elementos de S_n que son isomorfos con los sucesos básicos que son sumandos de la forma normal del α-conjunto.

Así pues si A es el α-conjunto y E'_j son los conjuntos básicos de su forma normal, es decir si $A = \Sigma E'_j$, entonces la función Probabilidad, P, aplicada a A asume el valor $P(A) = \sum_j P(E_j)$ en que los E_j son los elementos de S_n isomorfos con sus correspondientes conjuntos básicos E'_j .

La función así caracterizada está bien definida como función de probabilidad, pues por ser K' un colectivo es claro que la suma de todas las probabilidades asignadas a conjuntos básicos isomórfico con los elementos de S_n, es 1.

Es claro que en estas condiciones no hay diferencias prácticas entre el cuerpo F de todos los α-conjuntos y el cuerpo $T = \Sigma S_\upsilon$, cuerpo general de un colectivo.

2.2.3. Relación entre B y el continuo lineal.

2.2.3.1. Caso particular B_2. Se designa con B_2 el espacio de sucesiones cuyos elementos son los números 0, 1. Sea E = [0, 1] el intervalo cerrado de los reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que uno. Entonces, es claro que cualquier real, expresado en base 2, perteneciente a E, define una única sucesión que pertenece a B_2.

Proposición: Sea $B_2^{(n)}$ un conjunto básico de orden n perteneciente a B_2. Entonces existe un intervalo cerrado en E cuyos elementos quedan definidos por las sucesiones en B_2 que definen a $B_2^{(n)}$.

Demostración.

Sea $(x_1 \ldots x_n)$, $x_i = 0, 1$, un conjunto básico en B_2. Entonces

$0, x_1x_2 \ldots x_n\, 0000 \ldots 00 \ldots$ y $0, x_1x_2 \ldots x_n\, 11 \ldots 11 \ldots$, son dos reales en base dos y ciertamente definen un intervalo en 0, 1 y cada elemento de ese intervalo, en su representación binaria, define una sucesión de B_2, que es un punto en $B_2^{(n)}$.

Ejemplo. Sea $B_2^{(3)} = (011)$. Entonces es claro que en representación binaria los números $0, 01100000 \ldots 0 \ldots$ y $0, 01111 \ldots 1 \ldots$ serán los extremos del intervalo cerrado que comprenda a todos los números cuyas representaciones binarias están dadas por alguna sucesión del conjunto básico (011). En notación decimal se tendrá pues, una correspondencia entre el conjunto básico (011) y el intervalo cerrado [3/8 , 1/2].

2.2.3.2. Caso discreto general. Se designa con el símbolo B* el espacio de sucesiones correspondientes al espacio muestral S, igual al conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$. Para este caso es válida la siguiente proposición.

Proposición. Sea $E = [0, 1)$ el intervalo semiabierto en los reales. Sea $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una partición de E definida en la siguiente forma:

- $[a_n, b_n)$ es un intervalo semiabierto.
- $a_1 = 0$
- $a_n = b_{n-1}$
- $b_n = \dfrac{2^{n-1}}{2^n}$

Entonces existe una aplicación de B* en la partición que hacer corresponder a cada conjunto básico de orden 1 un elemento de la partición. Además, si $(i) \longrightarrow [a_i, b_i)$ es la aplicación anterior y $(i_j) \longrightarrow [a_{ij}, b_{ij})$ es otra aplicación del conjunto de los conjuntos básicos de orden 2 en la partición contable del intervalo i-ésimo, enton-

ces la repetición del proceso ad infinitum, determinará que cada sucesión en B* se corresponde con un punto en E. Por lo tanto existirá una aplicación de B* en E que hace corresponder los puntos de B* con los puntos de E.

Demostración: La existencia de la aplicación (i) $\longrightarrow [a_i, b_i)$ es obvia pues es la definición de la partición. La aplicación (ij) $\longrightarrow$ $[a_{ij}, b_{ij})$ se origina de la misma forma que la anterior restringida al intervalo $[a_i, b_i)$, para cada valor de i.

Así reiterando el mismo proceso indefinidamente se origina una sucesión de intervalos "encajonados" los cuales según el teorema de Cantor, convergen a un punto en E. Es decir, la construcción anterior permite asociar a cada sucesión en B*, un punto en E, mediante la convergencia de una sucesión de intervalos cada uno de los cuales se corresponde mismo lugar relativo.

Por ejemplo, la sucesión en B*, $\{x_j\}$ dada por $x_j = j^2$; $j \in \mathbb{N}$, corresponde con un punto E que pertenece al primer intervalo de la primera partición ($j^2 = 1$), al cuarto intervalo de la segunda ($j^2 = 4$) al noveno intervalo de la tercera partición ($j^2 = 9$)... .

2.2.4. Definición: Intervalos de división.

Los subintervalos en E correspondientes a cada conjunto básico de orden uno, dos, tres, ..., se denominan intervalos de división de primer, segundo, tercer, ... orden, respectivamente.

2.2.5. Definición: Contenido de un intervalo de división.

Análogamente y por extensión del caso del contenido de un con-

junto básico, se llamará contenido de un intervalo de división, al número asociado a cada intervalo de división, cuyo valor es el de la probabilidad o contenido del conjunto básico al cual corresponde el intervalo de división.

2.2.6. Definición: Cilindros en B.

El conjunto de sucesiones en B que tienen en común los elementos que ocupan los lugares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ se denomina cilindro de orden n. Un cilindro se designa anotando los términos constantes y los lugares que ocupan.

Ejemplo: $(a_2\ a_5\ a_6)$ con $a_2 = 0$, $a_5 = 1$, $a_6 = 1$, es el cilindro cuyos elementos que ocupan el segundo, quinto y sexto lugar son 0, 1, 1 respectivamente.

2.2.6.1. Proposición. Todo cilindro definido para los lugares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ es la suma de conjuntos básicos de orden n.

Demostración. Basta observar que

$$(a_{\alpha_1}, \ldots a_{\alpha_n}) = \sum_{x_1,\ldots,x_{\alpha_1-1},\ldots,x_{\alpha_n-1}} (x_1,\ldots,x_{\alpha_1-1}, a_{\alpha_1} \ldots\ldots \ldots\ldots x_{\alpha_{n-1}}, a_{\alpha_n})$$

Ejemplo. Para $S = \{0, 1\}$ el cilindro (a_2, a_3) será equivalente a la suma $(0\ a_2a_3) + (1\ a_2a_3)$.

2.2.6.2. Teorema. Sea A un conjunto de sucesiones. Sea Γ una selección de lugar definida por la sucesión creciente de naturales $\{\alpha_i\}$. Sea A' el conjunto de sucesiones generadas por aplicación de Γ sobre A. Es

decir cada elemento de A' es el resultado de la aplicación de Γ a un elemento de A. Entonces el contenido de A es igual al contenido de A'.

Demostración. (En este contexto el significado de contenido es el de Lebesque en $\mathbb{R}$, el cual asigna a cada intervalo de la recta real su longitud. Cada conjunto tendrá un contenido dado por la suma de los intervalos que lo cubran).

Sean pues, $E = [0, 1]$ el intervalo cerrado unitario y sea B_2 el espacio de sucesiones para el espacio muestral $S = \{0, 1\}$. Entonces A' puede ser:

- un conjunto numerable de sucesiones.
- un conjunto básico de orden n.
- una suma finita de conjuntos básicos.
- un conjunto medible.

En el primer caso, designando con $|A'|$ y $|A|$ los contenidos de ambos conjuntos, se tendrá $|A'| = 0$ y por lo tanto $|A| = 0$, pues un conjunto numerable de sucesiones sólo puede ser generado por una selección de lugar por otro conjunto numerable de sucesiones. Así pues $|A| = |A'|$.

En el segundo caso, el contenido de A' será el correspondiente al de un intervalo de longitud 2^{-n}, pues E y B_2 son naturalmente isomórficos y un conjunto básico en B_2 de la forma $(a_1a_2....a_n)$ se corresponde con un intervalo binario de la forma:

$$[a, b] \text{ con } a = 0, a_1, a_2 .... a_n\, 0000 ... 0 ... 0 ...$$

$$b = 0, a_1, a_2 .... a_n\, 1111 ... 1 ... 1 ...$$

y por lo tanto de longitud $2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} + ... + = 2^{-n}$

Además, si A' es un conjunto básico de orden n, A necesariamente es un cilindro $(b_{\alpha_1}b_{\alpha_2}... b_{\alpha_n})$. Luego A es expresable como una suma

de $2^{\alpha_n - n}$ conjuntos básicos de la forma $(b_1\ b_2 \ldots b_{\alpha_1} \ldots b_{\alpha_n})$ con $b_{\alpha_1} = a_1, \ldots, b_{\alpha_n} = a_n$ y los restantes b_i asumen independientemente los valores cero o uno. Como cada uno de estos conjuntos básicos tendrá un contenido $2^{-\alpha_n}$, según se vio en el párrafo anterior, resultará en definitiva que a A le corresponde un contenido

$$|A| = 2^{\alpha_n - n} \cdot 2^{-\alpha_n} = 2^{-n} = |A'|$$

En el tercer caso, cuando A' es suma de conjuntos básicos, resultará que A es suma de cilindros y nuevamente, como en el caso anterior $|A| = |A'|$.

Finalmente, si A' es medible, en el sentido de Lebesque, existirá un recubrimiento de intervalos cuyas longitudes sumen $|A'|$ y también para E - A' existirá un sistema de intervalos disjuntos que lo recubren. Ahora, de acuerdo al párrafo 2.2.5, para A, los mismos sistemas de intervalos constituirán los recubrimientos de A y E - A, y por lo tanto, A y A' tendrán el mismo contenido.

2.2.7. <u>Definición</u>: Cuerpo de Probabilidades.

En relación con el conjunto F, se denomina "Cuerpo de Probabilidades" al conjunto de elementos de F a los cuales se puede asignar una probabilidad. Se designa con la letra Φ o bien (F, Φ).

<u>Ejemplos</u>:

a) Determinar la probabilidad del suceso, "no aparece "seis"", en ningún lanzamiento de un dado regular y normal.

a') Determinar la probabilidad del suceso ""seis" aparecerá al menos 1000 veces".

Estos enunciados plantean relamente dos problemas, uno, el del cálculo de las probabilidades de sucesos, y otro, el de la legitimidad

de la interpretación a dicho resultado.

Sea Y_n = {secuencias en que aparece al menos un seis en n ensayos}

$Z_n = Y_n'$, complemento de Y_n

E_i = suceso "el "seis" aparece en el ensayo i"

Luego:

$$P(Y_n) = P\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)$$

Sea q = P ("seis")

p = P ("No seis")

Luego:

$$P(Y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} qp^i$$

$$= q\,\frac{1-p^n}{1-p} = 1 - p^n ,$$

$$P(Z_n) = 1 - P(Y_n)$$

$$= 1 - (1 - p^n)$$

$$= p^n$$

Tomando límite para $n \to \infty$, se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n) = 0$$

Además, se tendrá la sucesión $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es decreciente , pues

$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \ldots\ldots \quad Z_n \supset Z_{n+1} \ldots\ldots$ Por lo tanto, $\{Z_i\}$ converge a un conjunto Z el cual, ciertamente, no contendrá ningún seis. Es claro que en términos de sucesiones, Z no es un α-conjunto, pues no puede ser suma de conjuntos básicos ya que el principio de aleatoridad obliga a que en cualquier conjunto básico el "seis", como cualquier otro atributo factible, aparezca infinitas veces. Además, por ser el espacio muestral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ los α-conjuntos de orden acotado y los α-conjuntos coinciden, es decir $F = F_0$. Así pues, el valor

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n) = P\,(\lim_{n\to\infty} Z_n) = P(Z) = 0\ ,$$

no implica que Z está en el cuerpo de probabilidades de F. Así pues el problema a) no tiene sentido en la teoría de la probabilidad de Von Mises. El caso a') es análogo.

Ejemplo:

b) Sea $S = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$. Determinar las probabilidades del suceso definido por:

"1" en el primer ensayo, o

"2" en el primer y segundo ensayo, o

"3" en el primer, segundo y tercer ensayo, o

.....

.....

Naturalmente la pregunta del problema se refiere a la probabilidad del suceso (conjunto) definido por:

$$\gamma = (1) + (22) + (333) + \ldots$$

Es claro que γ es un α-conjunto, pues su complemento γ' es un α-conjunto ya que $\gamma' = B^* - \gamma = [(1) - (1)] + [(2) - (22)] + [(3) - (33)] + \ldots$ Por lo tanto, por ser cada paréntesis una suma de conjuntos básicos, también lo será $\gamma' = B^* - \gamma$.

Sin embargo, γ no puede tener asignada una probabilidad como elemento de F, pues γ no es de orden acotado.

2.2.8. Definición: El cuerpo F_1.

(Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto la necesidad de ampliar el espectro de los conjuntos a los cuales se les puede asignar probabilidades. Hay que tener presente en esta situación que los ejemplos citados corresponden a casos más o menos convencionales. Hasta el momento se puede sostener que para los conjuntos en F, para los cuales se puede definir una probabilidad, son aquellos para los cuales es posible decidir después de un cierto número de ensayos, la legitimidad de una eventual asignación de probabilidad).

Sea $M \subset B$, B espacio de secuencia arbitrario sobre el cual está definida la función de contenido o probabilidad, P, y M tal que,

a) $M \notin (F, \phi)$

b) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha_n, \beta_n \in (F, \phi))\ \{(\alpha_n \subset M \subset \beta_n)$

$\wedge\ (P(\beta_n) - P(\alpha_n) < \varepsilon)\}$

Entonces, se dirá que M posee una probabilidad y esta es:

$$P(M) = \lim_{n\to\infty} P(\beta_n) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n)$$

El conjunto de todos estos conjuntos M, que satisfacen estas condiciones, se denominará "cuerpo F_1".

2.2.8.1. Estructura de F_1

2.2.8.1.1. Definición: Evaluación regular.

Sea B un conjunto de sucesiones y P una función de probabili-

dad en B. Entonces se dirá que en B existe una "evaluación regular" si

a) ninguna sucesión en B tiene contenido o probabilidad positiva.

b) todo conjunto básico en B tiene contenido positivo.

2.2.8.1.2. Definición: Contenido interior y exterior.

Sea $M \subset B$. Entonces se llamará contenido interior de M al real definido por:

$$\underline{J}\ (M) = \sup_{\substack{\alpha \subset M \\ \alpha \in F}} P(\alpha)$$

Análogamente se llamará contenido exterior de M al real definido por:

$$\bar{J}\ (M) = \inf_{\substack{\beta \supset M \\ \beta \in F}} P(\beta)$$

Se dirá que M tiene contenido y se anotará J(M) si

$$\underline{J}\ (M) = \bar{J}\ (M) = J\ (M)$$

2.2.8.1.3. Proposición:

El conjunto de los conjuntos M para los cuales existe contenido J(M) coincide con el cuerpo F_1. Como consecuencia de esta equivalencia los conjuntos en F_1 se denominarán J-conjuntos.

Demostración:

Si $M \in F_1$ existen $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ en F tales que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$\bar{\alpha} \subset M \subset \bar{\beta}$ y

$P(\bar{\beta}) - P(\bar{\sigma}) \leq \varepsilon$. Así pues existen sup $P(\bar{\alpha})$ y inf $P(\bar{\beta})$ y ambos coinciden.

$\bar{\alpha} \subset M \qquad \bar{\beta} \supset M$

$\bar{\alpha} \in F \qquad \bar{\beta} \in F$

Por lo tanto $\bar{J}(M) = \underline{J}(M) = J(M)$ para todo $M \in F_1$.

Recíprocamente si:

$$J(M) = \inf_{\substack{\beta \supset M \\ \beta \in F}} P(\beta) = \sup_{\substack{\alpha \subset M \\ \alpha \in F}} P(\alpha) \text{ , entonces,}$$

habrá para cada $\varepsilon > 0$ un par de conjuntos α y β tales que $\alpha \subset M \subset \beta$ y $I(\beta) - I(\alpha) < \varepsilon$. Es decir $M \in F_1$.

2.2.8.1.4. <u>Proposición</u>:

a) $\forall M \subset B$, $\bar{J}(M) \geq \underline{J}(M)$

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de las definiciones.

b) Si M es un conjunto básico entonces $M \in F_1$.

<u>Demostración</u>: Todo conjunto básico tiene contenido único.

b') Si M es un α-conjunto entonces $M \in F_1$.

<u>Demostración</u>:

Al ser un α-conjunto una suma de conjuntos básicos, aplicando las definiciones de contenido para conjuntos en F, se obtiene la tesis.

c) $\{M_i\}_{i=1}^{n}$; $M_iM_j = 0$ para $i \neq j$; $M_i \in F_1$ implica que:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \in F_1 \text{ y } J(M) = \sum_{i=1}^{n} J(M_i)$$

Demostración: Es inmediata como consecuencia de las propiedades de supremos e ínfimos y de la distributividad de la función probabilidad sobre la suma de sucesos disjuntos.

d) $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$; $M_iM_j = 0$ $i \neq j$; $M_i \in F_1$; $M = \sum_{i \in \mathbb{N}} M_i \in F_i$

implican que $J(M) = \sum_{i \in \mathbb{N}} J(M_i)$

Demostración: Si $\forall i$, $M_i \in F_1$ y $M \in F_1$ entonces por definición se tendrá:

$$(\forall \varepsilon_i)(\exists \alpha_n^i , \beta_n^i \in F) \{(\alpha_n^i \subset M_i \subset \beta_n^i) = P(\beta_n^i) - P(\sigma_n^i) < \varepsilon_i\}$$

Además, por ser M_i un J-conjunto existirá $J(M_i)$ y por lo tanto se cumplirá que:

$$J(M_i) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n^i) = \lim_{n\to\infty} P(\beta_n^i)$$

Análogamente para M se cumplirá que:

$$(\forall \varepsilon)(\exists \alpha_n, \beta_n \in F) \{(\alpha_n \subset M \subset \beta_n) \Longrightarrow P(\beta_n) - P(\alpha_n) < \varepsilon\}$$

También, porque M es un J-conjunto, se tendrá que:

$$J(M) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n)$$

La disjunción de los conjuntos M_i implicará, a su vez, que pa-

ra todo $i \neq j$ se cumplirá que $\alpha_n^i \alpha_n^J = 0$ y por lo tanto

$$P(\sum_i \alpha_n^i) = \sum_i P(\alpha_n^i)$$

También se tendrá que $\alpha_n^i \subset M_i$ implica que:

$$\sum_i \alpha_n^i \subset \sum_i M_i \quad \text{y por lo tanto}$$

$$P(\sum_i \alpha_n^i) \leq P(\sum_i M_i)$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} P(\sum_i \alpha_n^i) = \lim_{n\to\infty} \sum P(\alpha_n^i) = \lim_{n\to\infty} J(\sum_i M_i) = J(M)$$

$$\therefore \sum_i \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n^i) = J(M)$$

$$\therefore \sum J(M_i) = J(M)$$

2.2.8.1.5. <u>Corolario</u>: En las condiciones de la letra d) para cualquier subfamilia de $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la suma de sus elementos tiene contenido.

2.2.8.1.6. <u>Definición</u>: Frontera de un conjunto.

Sea M un conjunto de sucesiones. Sea M* la suma de los conjuntos básicos contenidos en M. Sea M'* = (B- M), la suma de los abiertos contenidos en el complemento M'. Entonces se denomina frontera de M al conjunto : $\beta(M) = (M - M^*) + (M' - M'^*)$.

2.2.8.1.7. <u>Proposición</u>: Para todo $M \subset B$ se cumplirá que $\beta(M) = \beta(M')$

<u>Demostración</u>: Basta observar la simetría con respecto a M y M' , de la definición de $\beta(M)$.

2.2.8.1.8. Proposición:

$\beta(M)$ es cerrado.

Demostración:

a) Si M es abierto, entonces M' es cerrado. Luego, M coincide con M*. Así, M - M* será vacío y $\beta(M)$ se reducirá a M' - M'*. Pero M' $\supset$ M'* y M' - M'* es cerrado y por lo tanto $\beta(M)$ es cerrado.

b) Si M es cerrado, M' será abierto. Luego M' coincide con M'*. Así M' - M'* será vacío y $\beta(M)$ se reducirá a M - M*. Pero M $\supset$ M* y M - M* será cerrado y por lo tanto $\beta(M)$ es cerrado.

2.2.8.1.9. Proposición:

El contenido interior de un abierto coincide con su medida.

2.2.8.1.10. Teorema: Caracterización de los J-conjuntos.

Un conjunto tendrá contenido si y solo si la medida de su frontera es cero.

Demostración:

Lema previo: Si M tiene contenido, entonces B- M también lo tiene.

Demostración lema: Es claro que B tiene contenido, pues siempre es expresable como suma de conjuntos básicos. Ahora si M tiene contenido, entonces por definición se tendrá que para todo $\varepsilon > 0$ existen α_n y β_n en M tales que se cumple que:

$$\alpha_n \subset M \subset \beta_n \quad y$$

$$P(\beta_n) - P(\alpha_n) < \varepsilon$$

$$J(M) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} P(\beta_n)$$

Sea ahora:

$$\alpha'_n = B - \alpha_n$$

$$\beta'_n = B - \beta_n$$

Luego se cumplirá que: $\alpha_n \subset M \subset \beta_n$ implicará que $B - \beta_n \subset M' \subset B - \alpha'_n$ o sea $\beta'_n \quad M' \quad \alpha'_n$. Es decir, M' tendrá contenido.

Demostración teorema:

Si $J(\beta(M) = 0$, entonces $J(M - M^*) = J(M' - M^*) = 0$, pues la suma de dos no negativos igualada a cero implica que los sumandos son cero. Ahora, $B - \beta(M)$, (el complemento de $\beta(M)$ con respecto al espacio de sucesiones) quedará expresado por:

$$\begin{aligned} B - \beta(M) &= B - (M - M^*) - (M' - M'^*) \\ &= B - M + M^* - B + M + (B - M)^* \\ &= M^* + (B - M)^* \end{aligned}$$

Es claro que M^* y $(B - M)^*$ son abiertos, pues son sumas de conjuntos básicos. Como la hipótesis $J(\beta(M) = 0$ implica $J(M - M^*) = 0$, es decir, $M - M^*$ tiene contenido, resultará por el lema previo que el complemento $B - (M - M^*)$ tendrá contenido. Lo que implicará que $M^* + (B-M)$ tiene contenido y por lo tanto M^* y $(B - M)$ tendrán contenido. Finalmente, $M^* + (M - M^*)$ tendrá contenido. Es decir, la hipótesis que el contenido de la frontera de un conjunto es cero implica que el conjunto tiene contenido.

En símbolo,

$J(\beta(M)) = 0$ implicará que $J(M)$, existe.

Recíprocamente, si M tiene contenido entonces su complemento también lo tiene, y por lo tanto,

$$J(M) = |M| = |M^*|$$

$$J(M') = |M''| = |M'^*|$$

Si $|M - M^*| > 0$, entonces se tendrá:

$|M| = |M^* + (M - M^*)| > |M^*|$, lo que ciertamente es absurdo.

Análogamente,

$|M'| = |M'^* + (M' - M'^*)| > |M'^*|$, absurdo.

Luego $|M - M^*| = |M' - M'^*| = 0$

Es decir, $J(\beta(M)) = J(M - M^*) + J(M' - M'^*) = 0$

2.2.8.1.11. Teorema: El "cuerpo F_1" es un cuerpo.

Demostración (Ejercicio).

2.2.9. El cuerpo F_2

2.2.9.1. Introducción.

Se vio en los puntos anteriores, que la caracterización de los elementos de F_1 era que la frontera de ellos tenía contenido nulo. Naturalmente, surge la pregunta si existirá conjuntos que no estén en F_1. La respuesta tiene que ser dada en dos niveles, mostrando que bajo su valorización regular hay conjuntos con fronteras de contenidos y medidas no nulas, por un lado, y por otro, mostrando la caracterización de tales conjuntos. Así, para el primer nivel de respuesta, el ejemplo dado anteriormente, con respecto a la salida de "seis" solo un número finito de veces en lanzamientos consecutivos de un dado, muestra que hay conjuntos que no pertenecen a F_1. Efectivamente, puesto que el espacio

muestral S es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, las sucesiones en B podrán definirse como elementos de los 6^n conjuntos básicos de orden n. Obviamente, para cualquier valor de n cada conjunto básico contendrá algunas sucesiones (de hecho infinitas) en las cuales el "seis" aparecerá infinitas veces. Así pues, el conjunto que contiene a las sucesiones con un número finito de "seis" no contiene a ningún abierto, excepto el vacío. Ahora, si ω representa el conjunto en cuestión, entonces ω^*, que es el conjunto de los abiertos contenidos en ω, de acuerdo a lo anterior, es el conjunto vacío. También para el complemento ω' su correspondiente ω'^* es vacío, pues, así como cada conjunto básico contiene sucesiones con un número infinito de "seis", también contiene sucesiones con un número finito de "seis" y, por lo tanto, ningún conjunto básico estará contenido en ω'.

Así pues, se tendrá que la frontera de ω será:

$$\beta(\omega) = \omega - \omega^* + \omega' - \omega'^* = \omega + \omega' = B$$

Ciertamente, el contenido de B no es cero. Luego, efectivamente el conjunto ω, de las sucesiones que definen el suceso "el "seis" aparece sólo un número finito de veces", no es un elemento de F_1.

Sin embargo, el conjunto ω, sí es medible en el sentido de ser miembro de alguna σ-álgebra. En particular de la σ-álgebra definida por las subclases en B, y definiendo sobre esta σ-álgebra una función σ-aditiva. Procediendo así, resulta ω medible como se prueba a continuación:

Sea $A_n = \{x | x \in B,\ x \text{ tiene al menos } n \text{ "seis"}\}$.

Entonces, es claro que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, y por lo tanto, la sucesión de los complementos de cada A_n es decreciente. Luego se tendrá:

$$\lim_{n\to\infty} A' = \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n = A'_j = \omega$$

Nota: Este mismo ejemplo pone de manifiesto que F_1 no es σ- cuerpo , pues no tiene la propiedad de la clausura para la operación de paso al límite. Esto es equivalente a decir que F_1 no es un cuerpo monótono.

2.2.9.2. Definición: Cuerpo F_2 .

Sea B el conjunto de sucesiones correspondiente al espacio muestral S. Entonces se denomina cuerpo F_2 al conjunto definido de la siguiente manera:

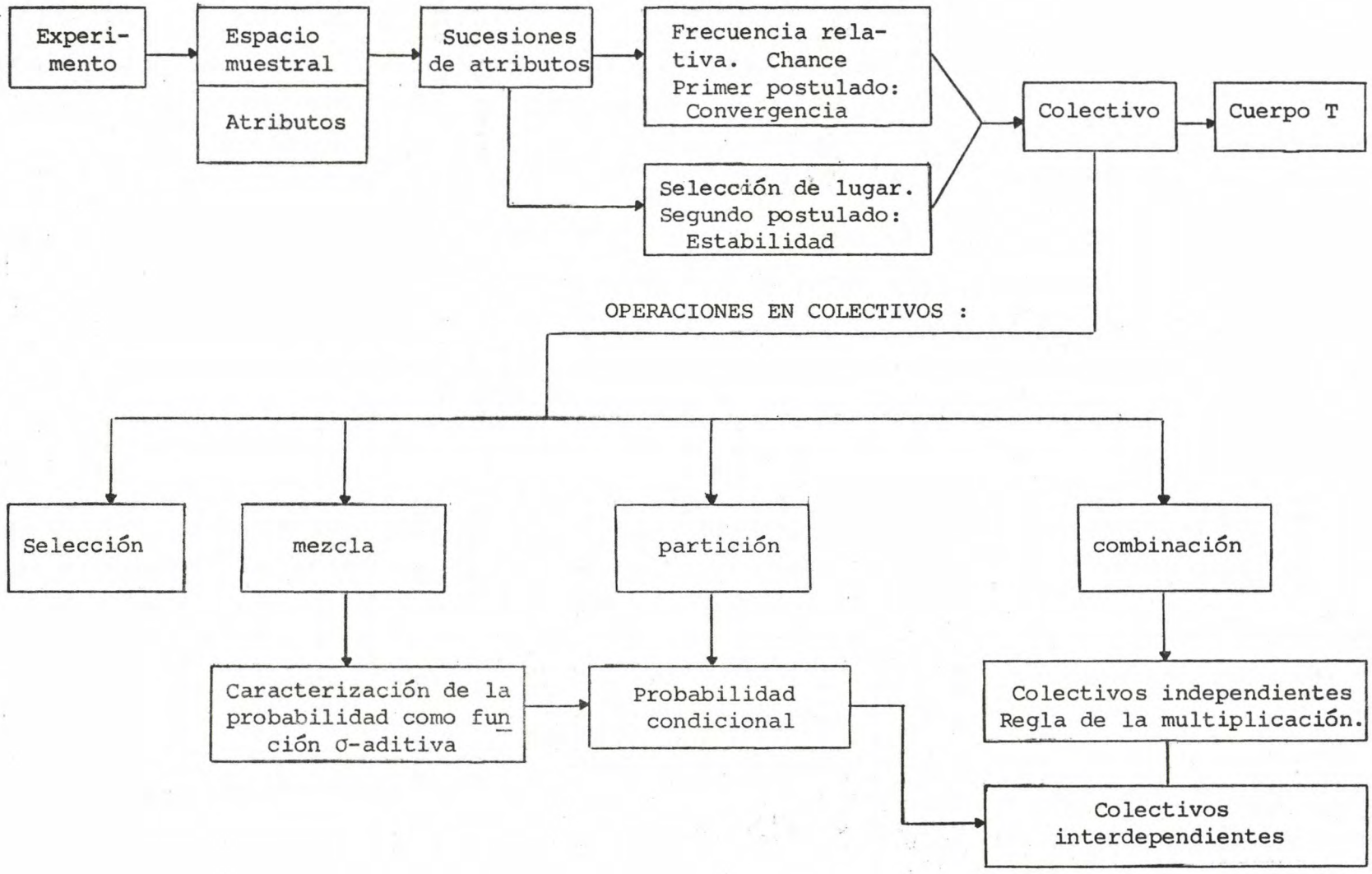
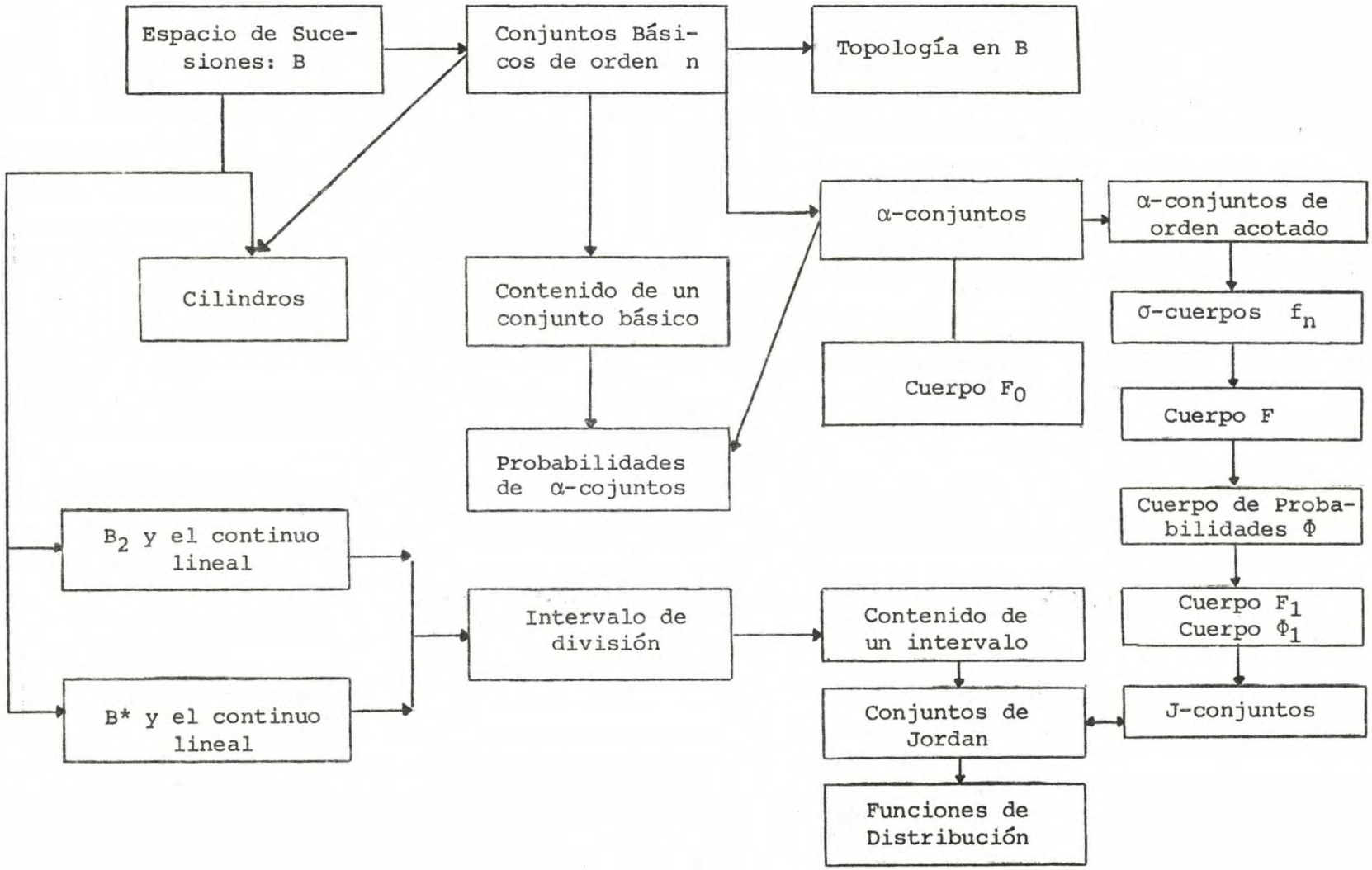
1°) Los elementos de F_2 son subconjuntos de B y constituyen una σ-álgebra.

2°) Existe una medida definida sobre F_2 que coincide con el contenido de los conjuntos en F_1.

Es decir, si ρ es una medida sobre F_2, entonces la restricción de ρ a F_1 , es decir ρ/F_1 es la función que asigna a los elementos de F_1 el contenido de ellos.

Es evidente que $F_2 \supset F_1 \supset F_0 \supset F$.

CUADRO SINÓPTICO: CASO DISCRETO.



CUADRO SINÓPTICO: CASO CONTINUO.