TEORÍA ESPECTRAL DE LOS PROBLEMAS CON CONDICIONES DE BORDE

PEDRO HUERTA MARIN*

Es posible asociar a un problema diferencial parcial un problema espectral, enmarcando éste último en un esquema general abstracto; interesa garantizar la solución de dicho problema.

PROBLEMA DIFERENCIAL (Ecuación del Calor)

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ "bastante regular ($\mathcal{C}^1$ por pedazos). Para todo $T > 0$, se tiene: $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$. Dadas las funciones $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f: Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, se requiere encontrar una función $u: (x, t) \in Q_T \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ solución de

* Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \quad \text{en } Q_T \\
u &= 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T \\
u(\cdot, 0) &= u_0 \quad \text{en } \Omega.
\end{aligned}
\tag{1}$$

PROBLEMA ESPECTRAL:

Mediante el método de separación de variables, el problema anterior podría reformularse como: Encontrar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una función $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, no idénticamente nula, que verifica:

$$\begin{aligned}
-\Delta w &= \lambda w \quad \text{en } \Omega \\
w &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma
\end{aligned}
\tag{2}$$

FORMULACION VARIACIONAL (de (2)):

Encontrar los valores propios $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una función $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq 0$, tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \lambda \int_{\Omega} w v dx \tag{3}$$

TEORIA ESPECTRAL ABSTRACTA:

Consideremos:

a) V y H espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, de dimensión infinita, tales que:

i) $V \subset H$ con inyección continua, ii) V es denso en H .

b) Una forma bilineal $u, v \rightarrow a(u, v)$ continua sobre $V \times V$.

EL PROBLEMA ESPECTRAL GENERAL:

Consiste entonces en: Encontrar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una solución $u \in V$, $u \neq 0$, de la ecuación

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \lambda(u, v) \quad (4)$$

donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto escalar en H .

Es claro que tomando $a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$,
 $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ y $V = H_0^1(\Omega)$, nuestro problema (3) se ajusta al esquema general abstracto 4.

Consideremos en lo sucesivo la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ simétrica. Si además es V -elíptica, es posible definir el operador $T \in \mathcal{L}(H, V)$ por:

$$\forall v \in V, \quad a(Tf, v) = (f, v)$$

y entonces el problema espectral general (4) se transforma en:

$$\text{Resolver la ecuación} \quad u = \lambda Tu \quad (5)$$

Para este efecto, se estudian diversas propiedades de T , que permitan demostrar el siguiente resultado general.

TEOREMA 1: Supongamos que la inyección canónica de V en H es compacta y que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica y V -elíptica. Entonces los valores propios de (4) forman una sucesión creciente que tiende a $+\infty$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$$

y existe una base hilbertiana ortonormal de H formada por los vectores propios w_m tales que $\forall v \in V, a(w_m, v) = \lambda_m (w_m, v)$; $m = 1, 2, \dots$. Además, la sucesión $(\lambda_m^{-1/2} w_m)$ forma una base hilbertiana ortonormal del espacio V para el producto escalar $a(\cdot, \cdot)$.

Es posible entregar una caracterización muy útil de los valores propios λ_m , mediante el cociente de Rayleigh:

$$R(v) = \frac{a(v, v)}{|v|^2}, \quad \forall v \in V, v \neq 0.$$

TEOREMA 2: (Principio del Mini-Máx) Bajo las condiciones del teorema 1), se tiene: $\lambda_m = \min_{\substack{E_m \subset V_m \\ v \in E_m \\ v \neq 0}} (\max R(v))$, donde V_m es la unión de los subespacios E_m de V de dimensión m .

OBSERVACION FINAL. Mediante la teoría anterior e introduciendo un subespacio V_k de V de dimensión finita $I = I(h)$, es posible, encontrar soluciones numéricas aproximadas del problema variacional espectral aproximado:

Encontrar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una solución $u_u \in V, u_h \neq 0$ de la ecuación

$$\forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = \lambda (u_h, v_h)$$