REVISTA PROYECCIONES: 109-150.
JORNADAS MATEMATICAS, AGOSTO 1983.

BASES DE LA TEORÍA CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Dr. JORGE BILLEKE GONZALEZ*

§.0. INTRODUCCION.

Este cursillo reúne el material básico para una introducción a la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales.

Todo lo que se desarrolla está en el excelente libro de Jorge Sotomayor "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias" Projecto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

El tratamiento de esta introducción es totalmente auto-suficiente, basta un curso de Cálculo de Ecuaciones Diferenciales. Merece una especial atención la construcción de los Teoremas de Existencia y diferenciabilidad usando el Teorema de contracción en las Fibras.

* Profesor Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

El objetivo es estudiar sistemas de ecuaciones diferenciales au
tónomas de la forma

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = X_1(x_1, \dots, x_n) \\ x_2' = X_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = X_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Nos interesa el análisis del retrato de Fase, es decir la parti
ción del dominio de (1), que es un abierto de $\mathbb{R}^n$ por las curvas integra
les del sistema.

El primero en abordar este problema fue H. Poincaré en su estu-
dio de la estabilidad del Sistema Solar.

Dos cuestiones son interesantes a investigar: Ubicación y dis
tribución de puntos singulares y órbitas periódicas, comportamientos asin-
tóticos de las curvas integrales y lo que se llama Estabilidad estructu-
ral del sistema (Persistencia de la configuración topológica del retrato
de Fase por pequeñas perturbaciones del sistema).

Aquí solo daremos las definiciones relevantes y las herramien-
tas básicas para el análisis cualitativo.

Un texto introductorio pero completo es "Sistemas Dinámicos Di-
ferenciables", Notas del Seminario Interuniversitario de Sistemas dinámi-
cos, USACH, 1983.

§.1. CAMPOS VECTORIALES Y FLUJOS.

1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Un Campo vectorial de Clase C^k $1 \leq k \leq \infty$ es
una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k . A todo Campo, se le puede
asociar una ecuación diferencial

$$x' = X(x)$$

Las soluciones a esta ecuación, que son, $\rho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$, ρ diferenciable tal que $\frac{d\rho}{dt}(t) = X(\rho(t)) \forall t \in I$ se llaman Trayectorias o Curvas integrales de X.

- 1.2. $x_0 \in U$ se dice una Singularidad de X, o un punto singular de X o un punto de equilibrio de X si $X(x_0) = 0$.
 $x_0 \in U$ se dice un punto regular si $X(x_0) \neq 0$

- 1.3. Lema: Si x_0 es punto singular, entonces $\rho(t) = x_0, -\infty < t < \infty$ es solución de $x' = X(x)$

Recíprocamente si $\rho(t) = x_0, -\infty < t < \infty$ es solución de $x' = X(x)$, entonces x_0 es punto singular de X.

Demostración:

$$0 = \rho'(t) = X(\rho(t)) = X(x_0)$$

- 1.4. Una curva integral $\rho : I \rightarrow U$ de X se llama máxima si para toda curva integral $\psi : J \rightarrow U$ con $I \subseteq J$ y $\rho = \psi|_I$ se tiene $I = J$.
 I se llama en este caso intervalo máximo.

- 1.5. Teorema:

a) Existencia y unicidad de soluciones máximas.

$\forall x \in U$ existe un intervalo abierto I_x donde está definida una única solución máxima ρ_x de $x' = X(x)$ tal que $\rho_x(0) = x$

b) Propiedad de grupo.

Si $y = \rho_x(t)$, $t \in I_x$ entonces $I_y = I_x - t = \{r-t / r \in I_x\}$ y
 $\rho_y(s) = \rho_x(t+s) \forall s \in I_y$

c) Diferenciabilidad respecto a las condiciones iniciales.

El conjunto $D = \{(t, x) / x \in U, t \in I_x\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y la aplicación

$\rho: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \rho(t, x) = \rho_x(t)$ es de clase C^k y satisface la ecuación

$$D_1 D_2 \rho(t, x) = DX(\rho(t, x)) \cdot D_2 \rho(t, x)$$

donde D es la diferencial y D_i las derivadas parciales, consideradas como matrices.

1.6. La aplicación ρ se llama el flujo generado por X .

Observemos que ρ satisface las propiedades de grupo a 1-parámetro es decir

$$\begin{cases} \rho(0, x) = x \\ \rho(t+s, x) = \rho(t, \rho(s, x)) \end{cases}$$

Si $I_x = \mathbb{R} \quad \forall x$.

En general se tiene $I_x \subsetneq \mathbb{R}$, por eso el flujo generado por X se llama también flujo local o grupo local a 1-parámetro generado por X .

Cuando $D = \mathbb{R} \times U$, tenemos un homomorfismo del grupo $(\mathbb{R}, +)$ con el grupo $\text{Dif}^k(U) = \{\xi: U \rightarrow U/\xi \text{ difeomorfismo de clase } C^k\}$ provisto de la operación composición

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{Dif}^k(U)$$

$$t \mapsto \rho_t, \text{ con } \rho_t(x) = \rho(t, x)$$

observemos que $\rho_{t+s} = \rho_t \circ \rho_s$ y $\rho_t^{-1} = \rho_{-t}$

La parte (a) del Teorema 1.5 son los clásicos Teoremas de Existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales debidos a Cauchy, Peano, Picard, Lipschitz, Anzelmá, Weierstrass, Legendre, Lindelöf, etc. Un excelente tratamiento se encuentra en el libro de Coddington y Levinson. En el capítulo 2 se da una hermosa demostración.

La parte (b) del Teorema 1.5 se desprende de lo siguiente.

Consideremos
$$\begin{cases} x' = X(x) \\ \rho(0) = \rho_x(t) \end{cases} \quad t, \text{ fijo}$$

obviamente $\rho_x(t+s)$ es solución, pues $\frac{d\rho_x}{ds}(t+s) = X(\rho_x(t+s))$

y $\rho_x(t+0) = \rho_x(t)$.

Por otro lado $\rho_y(s)$ también es solución, pues $\frac{d\rho_y}{ds}(s) = X(\rho_y(s))$

y $\rho_y(0) = y = \rho_x(t)$. Entonces por la parte (a)

$$\rho_x(t+s) = \rho_y(s) \quad \forall s \in I_x - t = I_y.$$

La parte (c), es mucho más delicada y la veremos en el capítulo 2.

1.7. Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$ donde A matriz real de $n \times n$.

Sea $\phi(t)$ una matriz fundamental de $x' = Ax$ con $\phi(0) = I$ entonces $\phi(t)$ cumple

$$1. \quad \phi'(t) = A\phi(t), \quad \phi(0) = I$$

$$2. \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$$

$$3. \quad [\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$$

$$4. \quad \text{La serie } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m A^m}{m!} \text{ converge uniformemente sobre compactos a } \phi(t)$$

$\phi(1) :=$ exponencial de la matriz A , se denota por e^A

Entonces el flujo del campo $x' = Ax$ es $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

con $\rho(t, x) = e^{tA}x$, que se llama Flujo Lineal

1.8. Corolario. Sea X un campo de clase C^k , $k \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$

Sea $x \in \Delta$ y $I_x = (w_-(x), w_+(x))$ y tal que $w_+(x) < \infty$

Entonces $\rho_x(t)$ tiende a ∂U (la frontera de U) cuando t tiende a $w_+(t)$. Es decir: $\forall K \subset U$ compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in [w_+(x) - \varepsilon, w_+(x))$, entonces

$$\rho_x(t) \notin K$$

Demostración: Si no. Supongamos exista $K \subseteq U$ compacto y una sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t_n \rightarrow w_+(x) < \infty$ tal que $\rho_x(t_n) \in K \forall n \in \mathbb{N}$. Luego existe $\{t_{n'}\} \subseteq \{t_n\}$ subsucesión tal que $\lim_{n' \rightarrow \infty} \rho_x(t_{n'}) = x_0 \in K$

Sean $b > 0$, $\alpha > 0$ tales que $B_b \times I_\alpha \subseteq D$ con

$$B_b = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y - x_0\| \leq b\} \subseteq U; I_\alpha = \{t \in \mathbb{R} / |t| < \alpha\}$$

esto es posible pues D es abierto.

Para n_0 suficientemente grande definamos $y := \rho_x(t_{n_0})$

Entonces para $0 < s < \alpha$, se tiene $(y, s) \in B_b \times I_\alpha \subseteq D$

luego podemos definir

$$\begin{aligned} \rho_y(s) &= \rho(s, y) = \rho(s, \rho_x(t_{n_0})) = \rho(s, \rho(t_{n_0}, x)) \\ &= \rho(s + t_{n_0}, x) = \rho_x(s + t_{n_0}) \end{aligned}$$

Luego como n_0 es suficientemente grande y $t_n \rightarrow w_+(x)$

se tiene $s + t_{n_0} > w_+(x)$. Lo que contradice la maximalidad de I_x .

Lo mismo ocurre si $w_-(x) > -\infty$ y $t \rightarrow w_-(x)$

1.9. Corolario: Sea $U = \mathbb{R}^n$ y $\|X(x)\| < M \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Entonces $I_x = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Supongamos $w_+(x) < \infty$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

Sabemos $\rho_t(x) = x + \int_0^t X(\rho_t(s)) ds$, tenemos

$$\|x - \rho_t(s)\| = \left\| \int_0^t X(\rho_t(s)) ds \right\| \leq Mt \leq Mw_+(x)$$

es decir $\forall t \in [0, w_+(x))$, $\rho_t(x) \in B(x, Mw_+(x))$, la bola con centro en x y radio $Mw_+(x)$, por lo tanto $\rho_t(x)$ no va a la frontera de $\partial\mathbb{R}^n$ cuando $t \rightarrow w_+(x)$ lo que contradice 1.7. Por lo tanto $w_+(x) = +\infty$. Análogamente $w_-(x) = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

1.10. Corolario: Si ρ es una solución de $x' = X(x)$ definida en su intervalo máximo I , y existen $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ con

$\rho(t_1) = \rho(t_2)$. Entonces $I = \mathbb{R}$ y $\rho(t+c) = \rho(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ con $c = t_2 - t_1$. Es decir ρ es periódica.

Demostración: Sea $\psi : [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$t \rightarrow \psi(t) = \rho(t-c)$$

se tiene $\psi'(t) = \rho'(t-c) = X(\rho(t-c)) = X(\psi(t))$

luego ψ es solución de $x' = X(x)$ y $\psi(t_2) = \rho(t_2-c)$

$= \rho(t_2 - (t_2 - t_1)) = \rho(t_1) = \rho(t_2)$. Entonces por unicidad de soluciones se tiene $[t_2, t_2 + c] \subseteq I$ y $\rho(t) = \psi(t+c) = \rho(t+c)$

si $t \in [t_1, t_2]$. Prosiguiendo de esta manera se tiene $I = \mathbb{R}$ y $\rho(t+c) = \rho(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

§.2. DIFERENCIABILIDAD DE LOS FLUJOS GENERADOS POR CAMPOS VECTORIALES.

El objetivo de este capítulo es demostrar la parte (c) del Teorema 1.5. El tratamiento es totalmente autosuficiente e incluirá (a) y (b).

2.1. Teorema de Contracción en la fibras.

Sean (X, d) , $(\hat{X}, \hat{d})$ espacios métricos completos y
 $\hat{F} : X \times \hat{X} \rightarrow X \times \hat{X}$
 $(x, \hat{x}) \rightarrow (F(x), \hat{F}(x, \hat{x}))$ Supongamos que

a) $F : X \rightarrow X$ tiene un punto fijo atractor, es decir existe $p \in X$ con
 $F(p) = p$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p \quad \forall x \in X$

b) La aplicación $x \mapsto \hat{F}(x, \hat{x})$ continua en $X \quad \forall \hat{x} \in \hat{X}$

c) $\forall x \in X$, la aplicación $\hat{F}_x : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ definida por

$\hat{F}_x(\hat{x}) = \hat{F}(x, \hat{x})$ es una λ -contracción con $\lambda < 1$, es decir

$$\hat{d}(\hat{F}_x(\hat{x}), \hat{F}_x(\hat{y})) \leq \lambda \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$$

Entonces:

Si $\hat{p}$ denota el único punto fijo atractor de $\hat{F}_p$ (que existe por ser λ -contracción) se tiene que el punto $\hat{p} = (p, \hat{p})$ es un punto fijo atractor de $\hat{F}$.

Demostración:

La demostración está basada en los 2 lemas siguientes

Lema 1; Sea $\{C_n\}_{n \geq 0}$ sucesión de números reales no negativos tales que $C_n \rightarrow 0$. Y sea λ tal que $0 < \lambda < 1$.

Entonces la sucesión

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} C_i \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad 0$$

Prueba: Interesante ejercicio de cálculo

Lema 2: Sea (Y, d) espacio métrico completo.

$\{F_n\}$ sucesión de λ -contracciones.

i) Si $\forall y \in Y, F_n(y) \rightarrow F_w(y)$. Entonces F_w también es una λ -contracción.

ii) Si y_w es el único punto fijo atractor de F_w . Entonces $\forall y_0 \in Y$, la sucesión $\{y_n\}$ definida por

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1 &= F_1(y_0) \\ y_2 &= F_2(y_1) \\ &\vdots \\ y_n &= F_n(y_{n-1}) \end{aligned}$$

converge para y_w cuando $n \rightarrow \infty$.

Prueba:

$$\begin{aligned} \text{i) } d(F_w(y), F_w(y')) &\leq d(F_w(y), F_n(y)) + d(F_n(y), F_n(y')) \\ &\quad + d(F_n(y'), F_w(y')) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon/2 + \lambda d(y, y') + \varepsilon/2 \text{ si } n \text{ suficientemente grande}$$

$$\therefore d(F_w(y), F_w(y')) \leq \lambda d(y, y') \text{ es una } \lambda\text{-contracción}$$

ii) $y_n = F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0)$ y consideremos

$$\begin{aligned} d(y_n, y_w) &\leq d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_0), F_n \circ \dots \circ F_1(y_w)) + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_w), y_w) \\ &\leq \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0), F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_w)) + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_w), F_n(y_w)) + d(F_n(y_w), y_w) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_w) + \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_w), y_w) + d(F_n(y_w), y_w) \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_w) + d(F_n(y_w), y_w) + \lambda [F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_w), F_{n-1}(y_w)] + \\ &\quad + d(F_{n-1}(y_w), y_w) \end{aligned}$$

$$\leq \lambda^n d(y_o, y_w) + d(F_n(y_n), y_w) + \lambda d(F_{n-1}(y_w), y_w) + \\ + \lambda^2 d(F_{n-2} \circ \dots \circ F_1(y_w), F_{n-1}(y_w))$$

$$\leq \lambda^n d(y_o, y_w) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d(F_{n-i}(y_w), y_w)$$

$$\lambda^n d(y_o, y_w) \rightarrow 0 \quad \text{pues } \lambda < 1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d(F_{n-i}(y_w), y_w) \rightarrow 0 \quad \text{por Lema 1 con } C_n = d(F_n(y_w), y_w)$$

$$y C_n \rightarrow 0 \quad \text{pues } F_n(y_w) \rightarrow F_w(y_w) = y_w$$

Por lo tanto $y_n \rightarrow y_w$.

Demostremos ahora el Teorema:

$$\text{Sea } \hat{x}_o = (x_o, \dot{x}_o), \quad x_n = F^n(x_o)$$

$$\hat{F}^1(\hat{x}_o) = (F(x_o), \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o)) = (x_1, \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o))$$

$$\hat{F}^2(\hat{x}_o) = \hat{F}(x_1, \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o)) = (F(x_1), \dot{F}_{x_1}(\dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o)))$$

$$= (x_2, \dot{F}_{x_1} \circ \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o))$$

$\vdots$

$$\hat{F}^n(\hat{x}_o) = (x_n, \dot{F}_{x_{n-1}} \circ \dot{F}_{x_{n-2}} \circ \dots \circ \dot{F}_{x_1} \circ \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o))$$

En la notación del Lema 2, tomemos

$$y_n = \dot{F}_{x_{n-1}} \circ \dots \circ \dot{F}_{x_o}(\dot{x}_o) \rightarrow \dot{F}_p(\dot{p}) = \dot{p}$$

$$\text{Entonces } \hat{F}^n(\hat{x}_o) = (x_n, y_n) \rightarrow (p, \dot{p}).$$

2.2. Teorema local de diferenciabilidad.

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Entonces $\forall x_0 \in U$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ con $I_\alpha \times B_\beta = \{(t, x) / |t| < \alpha, ||x - x_0|| < \beta\} \subseteq U$ y una única aplicación $\rho : I_\alpha \times B_\beta \rightarrow U$ de clase C^1 tal que

$$1) D_1 \rho(t, x) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) = f(\rho(t, x)) \text{ y } \rho(0, x) = x$$

$$2) D_1 D_2 \rho(t, x) = Df(\rho(t, x)) \cdot D_2 \rho(t, x)$$

$$\forall (t, x) \in I_\alpha \times B_\beta$$

Demostración:

Sea $b > 0$ tal que $\bar{B}_b = \{x / ||x - x_0|| \leq b\} \subseteq U$

sean $m = \sup ||f(x)||, x \in \bar{B}_b$

$$l = \sup ||Df(x)||, x \in \bar{B}_b$$

sean α, β tales que $\alpha m + \beta < b, \lambda = l\alpha < 1$

$X = \{\rho : I_\alpha \times B_\beta \rightarrow \bar{B}_b / \rho \text{ continua}\}$. En x tenemos la siguiente métrica

$$d(\rho, \psi) = \sup ||\rho(t, x) - \psi(t, x)|| \quad (t, x) \in I_\alpha \times B_\beta$$

$$L = \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / L \text{ lineal}\}, ||L||_L = \sup_{||x||=1} ||L(x)||$$

Sea $\dot{X} = \{\dot{\rho} : I_\alpha \times B_\beta \rightarrow L / \dot{\rho} \text{ continua y acotada}\}$

En $\dot{X}$ tenemos la métrica

$$d(\dot{\rho}, \dot{\psi}) = \sup_{(t, x) \in I_\alpha \times B_\beta} ||\dot{\rho}(t, x) - \dot{\psi}(t, x)||_L$$

Definamos $F : X \rightarrow X$ como $F(\rho)(t) = x + \int_0^t f(\rho(s, x)) ds$

y $\hat{F} : X \times \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ como $\hat{F}(\rho, \dot{\rho})(t, x) = I + \int_0^t Df(\rho(s, x)) \cdot \dot{\rho}(s, x) ds$
 I identidad de L_i

Demostremos que $\hat{F} := (F, \hat{F})$ satisface las hipótesis de 2.1.

i) F es una λ -contracción:

$$d(F(\rho), F(\psi)) = \sup \left\| \int_0^t [f(\rho(s, x)) - f(\psi(s, x))] ds \right\|$$

$$\leq \sup_{T.V. Medio} \left| \int_0^t \lambda \|\rho(s, x) - \psi(s, x)\| ds \right| \leq \alpha \lambda d(\alpha, \psi)$$

$$= \lambda d(\alpha, \psi) \quad \therefore F \text{ tiene un \uacutenico punto fijo atractor } \rho \in X$$

ii) $\rho \rightarrow \hat{F}(\rho, \dot{\rho})$ es continua en $X \quad \forall \quad \dot{\rho} \in \hat{X}$, pues

Df es uniformemente continua en $\bar{B}_b$

iii) $d(\hat{F}_\rho(\dot{\rho}), \hat{F}_\rho(\dot{\psi})) =$

$$= \sup \left\| \int_0^t Df(\rho(s, x)) [\dot{\rho}(s, x) - \dot{\psi}(s, x)] ds \right\|_L \leq \lambda d(\dot{\rho}, \dot{\psi})$$

El punto fijo atractor de $\hat{F}$ es de la forma $\hat{\rho} = (\rho, \dot{\rho})$

donde $F(\rho) = \rho$ es decir:

$$F(\rho)(t, x) = x + \int_0^t f(\rho(s, x)) ds = \rho(t, x) \quad (*)$$

Luego $\rho(0, x) = x$ y derivando respecto de $t(*)$ tenemos

$D_1 \rho(t, x) = f(\rho(t, x))$ es decir hemos demostrado (1) pues ρ es \u00fanica por ser \u00fanico el punto fijo de F y es continua en $I_\alpha \times B_\beta$ por ser elemento de X .

Demostremos que ρ es de clase C^1 con respecto a x y que

$$D_2 \rho = \dot{\rho}$$

Claramente ρ es de clase C^1 respecto a t , por ser $D_1 \rho = f \circ \rho$ que es continua.

$$\text{Sea } \hat{\rho}_n = (\rho_n, \dot{\rho}_n) = \hat{F}^n(\hat{\rho}_0) \text{ donde } \rho_0(t, x) = x$$

y $\dot{\rho}_0(t, x) = I$. Por lo construido anteriormente $((\rho, \dot{\rho})$ punto fijo atractor de $\hat{F})$, tenemos $\rho_n \rightarrow \rho, \dot{\rho}_n \rightarrow \dot{\rho}$ uniformemente en $I_\alpha \times B_\beta$.

Aun más, ρ_n es de clase C^1 y $D_2\rho_n = \dot{\rho}_n$, esto se puede verificar trivialmente por inducción

$$n = 0 ; \rho_0(t, x) = x \text{ clase } C^1 \text{ y } D_2\rho_0(t, x) = I = \dot{\rho}_0(t, x)$$

$$n = 1 ; \hat{F}(\hat{\rho}_0) = F(\rho_0, \dot{\rho}_0) = (F(\rho_0), \dot{F}(\rho_0, \dot{\rho}_0))$$

$$= (x + \int_0^t f(\rho_0(s, x)) ds, I + \int_0^t Df(\rho_0(s, x)) \cdot \dot{\rho}_0(s, x) ds)$$

$$= (x + f(x)t, I + Df(x)t) := (\rho_1, \dot{\rho}_1)$$

$$\rho_1 \text{ de clase } C^1 \text{ y } D_2\rho_1 = I + Df(x)t = \dot{\rho}_1$$

etc., etc.

Luego $\forall n, D_2\rho_n = \dot{\rho}_n \in \dot{X}$, por lo tanto $D_2\rho_n$ continua.

$$\text{y } \lim D_2\rho_n = D_2 \lim \rho_n = D_2\rho$$

$$\text{y } \lim \dot{\rho}_n = \dot{\rho} \text{ (se puede hacer por continuidad uniforme)}$$

Entonces $D_2\rho = \dot{\rho} \in \dot{X}$, por lo tanto continua en $I_\alpha \times B_\beta$

Para demostrar la fórmula (2), derivemos respecto de t la relación:

$$\begin{aligned} D_2\rho(t, x) &= \dot{\rho}(t, x) = \dot{F}(\rho, \dot{\rho})(t, x) = \dot{F}(\rho, D_2\rho)(t, x) \\ &= I + \int_0^t Df(\rho(s, x)) D_2\rho(s, x) ds \end{aligned}$$

$$\text{Luego } D_1 D_2\rho(t, x) = Df(\rho(t, x)) D_2\rho(t, x)$$

$$\forall (t, x) \in I_\alpha \times B_\beta.$$

2.3. Teorema Global de diferenciabilidad (Teorema 1.5)

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, f de clase C^k , $k \geq 1$ en el abierto U . Entonces

a) $\forall x \in U$, existe $I_x \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, existe

$\rho_x : I_x \rightarrow U$ curva integral máxima del campo f pasando por x .

Es decir ρ_x satisface la ecuación $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x$

b) Si $y = \rho_x(t)$, $t \in I_x$, entonces

$$I_y = I_x - t = \{\tau - t / \tau \in I_x\} \text{ y } \rho_y(s) = \rho_x(t+s) \quad \forall s \in I_y$$

c) El conjunto $D = \{(t, x) / x \in U, t \in I_x\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y la aplicación $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\rho(t, x) = \rho_x(t) \text{ es de clase } C^k.$$

La demostración del teorema se desprende de las siguientes dos proposiciones.

Proposición 1.

Sea $S_x = \{\psi : I_\psi \rightarrow U / \psi \text{ solución del problema } x' = f(x), x(0) = x\}$, $x \in U$. Definamos $I_x = \bigcup_{\psi \in S_x} I_\psi$

Entonces:

- (i) $\rho_x : I_x \rightarrow U$ definida por $\rho_x(t) = \psi(t)$ si $t \in I_\psi$ es la única curva integral máxima def. por x .
- (ii) Si $t \in I_x$, $y = \rho_x(t)$, entonces $I_y = I_x - t = \{s - t / s \in I_x\}$ y $\forall s \in I_y$ se tiene $\rho_x(t+s) = \rho_y(s)$

Prueba:

(i) Es suficiente verificar que ρ_x está bien definida. Es decir si $\psi_1, \psi_2 \in S_x$ entonces $\psi_1 = \psi_2$ en $(a,b) = I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ pues si

$A = \{t \in (a,b) / \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$ es un conjunto cerrado y no vacío. Probemos que A es abierto. Sea $t' \in A$ y $y = \psi_1(t') = \psi_2(t')$. Entonces por el Teorema local de diferenciabilidad (2.2) existe una única curva integral ψ de $x' = f(x)$, $x(0) = y$ definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$.

Notemos que $\tilde{\psi}_1(s) = \psi_1(t'+s)$, entonces $\tilde{\psi}_1 \in S$ y pues $\frac{d}{ds} \tilde{\psi}_1(s) = \frac{d}{ds} \psi_1(t'+s) = f(\psi_1(t'+s)) = f(\tilde{\psi}_1(s))$ y por unicidad se tiene $\psi_1 = \psi$ en $(a,b) \cap (I+t')$.

Analogamente $\tilde{\psi}_2(s) = \psi_2(t'+s)$, $\tilde{\psi}_2 \in S_y$ y $\psi_2 = \psi$ en $(a,b) \cap (I+t')$. Luego $\psi_1 = \psi_2$ en $(a,b) \cap (I+t')$ es decir A es abierto. Por conexidad $A = (a,b)$.

(ii) Tenemos $\rho_y(s) = \rho_x(t+s)$ luego $\rho_y(s)$ está definida para $s \in I_x - t$, donde $I_x - t \subset I_y$. Por otro lado $\psi_y(-t) = x$ y $\rho_x(s) = \rho_y(-t+s)$ donde $\rho_x(s)$ está definida $\forall s \in I_y + t$. Luego $I_y + t \subset I_x$ es decir $I_y \subset I_x - t$. Entonces $I_y = I_x - t$.

Esta proposición es válida para f de clase C^1

Proposición 2.

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en el abierto U. Entonces $D = \{(t,x) / x \in U, t \in I_x\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y el flujo $\rho(t,x) = \rho_x(t)$ es de clase C^1 en D y satisface

$$D_1 D_2 \rho(t, x) = Df(\rho(t, x)) D_2 \rho(t, x) \dots (*)$$

$\forall (t, x) \in D.$

(I_x es el intervalo de la solución ρ_x máxima de S_x)

Prueba:

$C^+ = \{t \in I_{x_0} / t > 0 \text{ y existe un abierto } B_t \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in B_t \text{ tal que}$

$[0, t] \times B_t \subset D \text{ y } \rho \text{ es de clase } C^1 \text{ y satisface } (*) \text{ en } (0, t) \times B_t\}$

Por el teorema local de diferenciabilidad (2.2), $C^+ \neq \emptyset$.

Sea $s = \text{Supremo de } C^+$. Demostremos que s es el extremo superior de I_x .

Si no lo fuera, $s \in I_x$, sea $x_1 = \rho(s, x_0)$.

Por el teorema local de diferenciabilidad (2.2) existe $I \times B$ vecindad de $(0, x_1)$ en la cual ρ satisface (*). Sea d el largo de I y $u \in \mathbb{R}$ tal que $u < s$ y $s - u < d/2$ y $\tilde{B}$ una vecindad de x_0 tal que $\rho(u, y) \in B \quad \forall y \in \tilde{B}$.

Si $y \in \tilde{B}$ y $t \in [0, u + d/2]$ tenemos por la proposición 1 que $\rho(t, y) = \rho(t - u, \rho(u, y))$. $\therefore \rho$ es de clase C^1 en $(0, u + d/2) \times \tilde{B}$. Veamos que ρ satisface (*) en este conjunto como $\rho(t, x) = \rho(t - u, \rho(u, x))$ derivando respecto a x

$$D_2 \rho(t, x) = [D_2 \rho(t - u, \rho(u, x))] D_2 \rho(u, x) \dots (**)$$

derivando ahora respecto a t y observando que $t - u \in C^+$

$$D_1 D_2 \rho(t, x) = [D_1 D_2 \rho(t - u, \rho(u, x))] D_2 \rho(u, x) + 0$$

$$= [Df(\rho(t, x)) D_2 \rho(t - u, \rho(u, x))] D_2 \rho(u, x)$$

$$= Df(\rho(t, x)) D_2 \rho(t, x) \quad (\text{por } **)$$

Luego $u + d/2 \in C^+$ y es mayor que s . Contradicción.

Analogamente se define C^- y se tiene $I_{x_0} = C^- \cup C^+$

Demostración de 2.3. Inducción sobre k.

$k = 1$. La proposición 2.

$k > 1$, supongámoslo válido para $k-1$. Consideremos el campo

$F = (f, Df)$ de clase C^{k-1} en $U \times \mathbb{R}^{n^2}$ definido por

$$F(x, L) = (f(x), Df(x) \cdot L), \quad L \in L.$$

Por la proposición 2 y la hipótesis de inducción aplicada a F tenemos que el flujo

$$\phi(t, y, Y) = (\rho(t, y), D_2 \rho(t, y) \cdot Y) \text{ es de clase } C^{k-1} \text{ en } D' = D \times \mathbb{R}^{n^2}$$

Luego $D_2 \rho$ es de clase C^{k-1} en D , también $D_1 \rho = f$ o ρ es de clase C^{k-1} pues f de clase C^k y ρ de clase C^{k-1} .
Luego ρ de clase C^k en D .

§.3. RETRATO DE FASE DE UN CAMPO VECTORIAL.

3.1. La imagen de una curva integral de X por el punto $p \in U$ se llama órbita de X por el punto p , y se denota γ_p . Es decir

$$\gamma_p = \{\rho(t, p) / t \in I_p\}$$

3.2. Lema $q \in \gamma_p \iff \gamma_p = \gamma_q$

Prueba: Si $q \in \gamma_p$, $q = \rho(t_1, p)$ y $\rho(t, q) = \rho(t+t_1, p)$ y

$$I_p - t_1 = I_q$$

Luego dos órbitas de X coinciden o son disjuntas.

Entonces podemos descomponer U en una unión disjunta de curvas diferenciales pudiendo ser cada una

a) Imagen biunívoca de un intervalo de $\mathbb{R}$,

b) Un punto, o

c) Difeomorfa a un círculo,

correspondiendo a las alternativas del teorema 3.3 que sigue.

En el caso b) $p = \gamma_p$ y la órbita se llama un punto singular.

En el caso c) la órbita se llama cerrada o periódica.

3.3. Teorema:

Si ρ es una solución máxima de $x' = X(x)$,

entonces se verifica una única de las siguientes alternativas.

a) ρ es inyectiva.

b) $I = \mathbb{R}$ y ρ es constante.

c) $I = \mathbb{R}$ y ρ es periódica. Es decir existe $\tau > 0$ tal que $\rho(t+\tau) = \rho(t)$
 $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\rho(t_1) \neq \rho(t_2)$ si $|t_1 - t_2| < \tau$

Demostración: Si ρ no es inyectiva, $\rho(t_1) = \rho(t_2)$ para algún $t_1 \neq t_2$,
 entonces por Corolario 1.10 $I = \mathbb{R}$ y $\rho(t+c) = \rho(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$ y $C = t_2 - t_1 \neq 0$

Sea $C = \{C \in \mathbb{R} / \rho(t+C) = \rho(t) \ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Demostremos que C es un subgrupo aditivo cerrado de $\mathbb{R}$, luego (Teoría de Grupos!) C es de la forma $\tau \mathbb{Z}$ ó C es denso en $\mathbb{R}$ y por cerrado $C = \mathbb{R}$, lo que corresponde a las alternativas b) y c).

Efectivamente C es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, pues si $c, d \in C$ entonces $c + d \in C$ pues $\rho(t+c+d) = \rho(t+c) = \rho(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$
 y $-c \in C$ pues $\rho(t-c) = \rho(t-c+c) = \rho(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$

Veamos que C es cerrado. Si $c_n \in C$, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$, demostramos que $c \in C$.

$$\begin{aligned} \rho(t+c) &= \rho(t+\lim_{n \rightarrow \infty} C_n) = \rho(\lim_{n \rightarrow \infty} (t+c_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(t+c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho(t). \end{aligned}$$

3.4. Un conjunto abierto U , provisto de descomposición en órbitas de X se llama retrato de fase de X .

Las Órbitas son orientadas en el sentido de las curvas integrales del campo X .

3.4. Ejemplos:

1.- Campos en la recta real. Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ campo de clase C^k supongamos $X^{-1}(0) = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ puntos singulares. Hagamos $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = \infty$

En cada intervalo (a_i, a_{i+1}) $i = 0, 1, \dots, n$ el signo de X es constante. Fijemos un intervalo (a_i, a_{i+1}) donde X es positivo. Entonces $\forall x \in (a_i, a_{i+1})$ tenemos $\rho(t, x)$ estrictamente creciente en su intervalo máximo $I_x = (w_-(x), w_+(x))$

Además afirmamos:

a) $\rho(t, x) \rightarrow a_i$ cuando $t \rightarrow w_-(x)$; $\rho(t, x) \rightarrow a_{i+1}$ cuando $t \rightarrow w_+(x)$.

En efecto si $\rho(t, x) \rightarrow b > a_i$ cuando $t \rightarrow w_-(x)$ como $\rho(t, b)$ es estrictamente creciente se tiene $\gamma_x \cap \gamma_b \neq \emptyset$ es decir $\gamma_x = \gamma_b$. Contradicción. Análogamente cuando $t \rightarrow w_+(x)$.

b) Si $i \geq 1$ tenemos $w_-(x) = -\infty$

Pues $\forall t \in I_x$, se tiene $\rho(t, x) > a_i > -\infty$ esto implica por la proposición 1 del Teorema 2.3 que $w_-(x) = -\infty$.

c) Si $i < n$, tenemos $w_+(x) = \infty$

Si X es negativa en (a_i, a_{i+1}) los resultados son recíprocos.

GRAFICO DE X

RETRATO DE FASE DE X

2.- Campos Simples en el plano real.

Por campos simples en el plano real, entenderemos sistemas reales de la forma

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\text{y } a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$$

Equivalentemente, es una ecuación lineal homogénea del tipo

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ es el único punto singular, es decir el origen es el único punto fijo del flujo lineal $\rho(t, x) = e^{tA} x$

Los valores propios de A son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{Traza } A \pm \sqrt{(\text{Traza } A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Caso a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ (Necesariamente $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$)

Sean v_1, v_2 los vectores propios correspondientes a λ_1, λ_2 ,

$E_1 = \langle v_1 \rangle$ el subespacio generado por v_1 , $E_2 = \langle v_2 \rangle$

$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$. El flujo en estas coordenadas esta dado por

$$\rho(t, (x_1, x_2)) = x_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + x_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Caso a₁: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ Nodo atractor (Pozo).

$x \neq 0$ $\rho(t, x) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty; \rho(t, x) \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty$

$x = 0$ $\rho(t, 0) = 0$

Si $x_1 \neq 0$, la tangente al flujo tiende a E_1 cuando $t \rightarrow \infty$ pues

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2 e^{\lambda_2 t}}{x_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{x_2}{x_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0 \text{ pues } \lambda_2 - \lambda_1 < 0$$

Si $x_1 = 0$, $\{\rho(t, x)\}$ son las semi-rectas de E_2

Caso a₂: $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ Nodo repulsor (Fuente)

Análisis similar.

Caso a₃: $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ Silla

Análisis similar

Caso b) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$

En este caso $\rho(t, x) = x_1 \rho_1(t) + x_2 \rho_2(t)$ donde

$$\rho_1(t) = e^{\alpha t} [\cos \beta t v_1 - \sin \beta t v_2]$$

$$\rho_2(t) = e^{\alpha t} [\sin \beta t v_1 + \cos \beta t v_2]$$

Si escribimos x en coordenadas polares tenemos $x_1 = \delta \cos w$

$x_2 = \delta \sin w$. Entonces

$$\rho(t, x) = e^{\alpha t} \delta [\cos(w - \beta t) v_1 + \sin(w - \beta t) v_2]$$

Caso b₁: $\alpha = 0$, Centro

$\forall x \neq 0$, $\rho(t, x)$ es una elipse. El signo de β da la orientación respecto de t

Caso b_2 : $\alpha < 0$, Foco atractor

$$||\rho(t, x)|| \rightarrow 0; t \rightarrow \infty \text{ y } w - \beta t \rightarrow +\infty \text{ si } \beta < 0$$

y $w - \beta t \rightarrow -\infty$ si $\beta > 0$. Luego las órbitas tienden al origen espiralando, pues $w - \beta t$ mide el ángulo entre $\rho(t)$ con E_1

Caso b_3 : $\alpha > 0$ Foco repulsor

Análisis similar

Caso c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) Nodos impropios

Caso c_1 : Nucelo $A - \lambda I$ es bidimensional. Es decir λ tiene vectores propios v_1, v_2 linealmente independientes

$$\rho(t, x) = e^{\lambda t} (x_1 v_1 + x_2 v_2). \text{ Entonces}$$

Caso c_2 : Nucleo $A - \lambda I$ es unidimensional. Supongamoslo igual a E_1 y

sea v un generador de E_1 . Sea w un vector no colineal con v .

Entonces

$$Av = \lambda v$$

$$Aw = \mu w + \alpha v, \quad \mu, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

lo que implica que la matriz del operador $x \rightarrow Ax$ en la base $\{v, w\}$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

Los valores propios de esta matriz son λ y μ . Y como los valores propios no dependen de la base $\lambda = \mu$ por hipótesis.

Definamos $v_1 = \alpha v$

$$v_2 = w$$

En esta base $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = \lambda v_2 + v_1$ y el flujo es

$$\rho(t, x) = e^{\lambda t} [(x_1 + tx_2) v_1 + x_2 v_2]$$

$$x = 0, \quad \rho(t, 0) = 0$$

$x \neq 0$ con $x_2 = 0$, $\{\rho(t, x)\}$ son las semi-rectas de E_1

$x \neq 0$ con $x_2 \neq 0$, la tangente al flujo tiende a E_1 cuando $t \rightarrow \pm \infty$, pues

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{x_2 e^{\lambda t}}{(x_1 + tx_2) e^{\lambda t}} = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\frac{x_1}{x_2} + t} = 0$$

Además si $x \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t, x) = 0$ si $\lambda < 0$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(t, x) = 0$ si $\lambda > 0$

3.- Otro ejemplo de Retrato de Fase.

Sea $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (x, -y + x^3)$

el flujo de X está dado por

$$\rho(t, (x, y)) = (xe^t, (y - \frac{x^3}{4})e^{-t} + \frac{x^3}{4}e^{3t})$$

Sea $\psi(t, p)$ el flujo de la silla $Y(x, y) = (x, -y)$ del ejemplo anterior
Entonces la aplicación

$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \rightarrow (x, y + \frac{x^3}{4})$

satisface $h(\psi(t, p)) = \rho(t, h(p))$

Este ejemplo nos motiva al siguiente Capítulo.

§.4. EQUIVALENCIA Y CONJUGACION DE CAMPOS VECTORIALES.

4.1. Sean $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$. X_1 se dice topológicamente equivalente a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ que lleva órbitas de X_1 en órbitas de X_2 preservando orientación.

Es decir; si $p \in U_1$ y $\gamma_1(p)$ es la órbita orientada de X_1 pasando por p , entonces $h(\gamma_1(p))$ es la órbita orientada de X_2 pasando por $h(p)$, $\gamma_2(h(p))$.

Mas preciso; $h(\rho_1(t,p)) = \rho_2(t',h(p))$ con $t \cdot t' > 0$ donde ρ_1 es el flujo de X_1 , y ρ_2 el flujo de X_2 .

Si h es un difeomorfismo de clase C^r , los campos se dicen C^r -equivalentes. (C^0 -equivalentes = Topológicamente equivalentes).

Estas definiciones establecen relaciones de equivalencias entre campos definidos en abiertos de $\mathbb{R}^n$.

El homeomorfismo h se llama una equivalencia topológica y el C^r -difeomorfismo se llama una C^r -equivalencia.

4.2. X_1 se dice topológicamente conjugado a X_2 cuando existe

$h : U_1 \rightarrow U_2$ homeomorfismo tal que

$$h(\rho_1(t,x)) = \rho_2(t,h(x)) \quad \forall (t,x) \in D_1 \text{ dominio de } \rho_1$$

Si h es un difeomorfismo de clase C^r , los campos se dicen C^r -conjugados (C^0 -conjugados = Topológicamente conjugados)

En este caso $I_x^1 = I_{h(x)}^2$ (el sobreíndice indica el campo).

El homeomorfismo h se llama una conjugación topológica y el difeomorfismo de clase C^r se llama una C^r -conjugación.

4.3. Observemos que las relaciones de conjugación son de equivalencia entre campos definidos en abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Toda conjugación es una equivalencia.

Toda equivalencia lleva puntos singulares en puntos singulares y órbitas periódicas en órbitas periódicas.

Si h es una conjugación el período de las órbitas también es preservado.

4.4. Ejemplos:

a) En el ejemplo 3 de 3.4. h es una C^∞ -conjugación.

b) Sean $x' = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $a > 0$

$$x' = Bx \text{ con } B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad b > 0$$

Estos campos lineales son centros cuyas órbitas periódicas tienen período $\frac{2\pi}{a}$ y $\frac{2\pi}{b}$

Si $a \neq b$ estos campos no son conjugados.

La identidad de $\mathbb{R}^2$ define una C^∞ -equivalencia entre estos campos.

4.5. Lema de Caracterización de conjugaciones diferenciales.

Sean $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos de clase C^r y $h : U_1 \rightarrow U_2$ un difeomorfismo de clase C^r . Entonces h es una conjugación entre X_1 y X_2 si y sólo si

$$Dh(p) X_1(p) = X_2(h(p)) \quad \forall p \in U_1 \dots (*)$$

Demostración:

$\Leftarrow$) Sea $p \in U_1$, definamos $\psi(t) = h(\rho_1(t, p))$, $t \in I_p^1$

ψ es solución de $x' = X_2(x)$, $x(0) = h(p)$, pues;

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\rho_1(t, p)) \frac{d}{dt} \rho_1(t, p) = Dh(\rho_1(t, p)) X_1(\rho_1(t, p)) \\ &= X_2(h(\rho_1(t, p))) = X_2(\psi(t)) \text{ y } \psi(0) = h(p) \end{aligned}$$

Pero $\rho_2(t, h(p))$ es solución de $x' = X_2(x)$, $x(0) = h(p)$

entonces por unicidad $h(\rho_1(t, p)) = \rho_2(t, h(p))$

$\Rightarrow$) Derivemos respecto de t en $t = 0$ $h(\rho_1(t, p)) = \rho_2(t, h(p))$

$$Dh(\rho_1(0, p)) \frac{d}{dt} \rho_1(t, p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \rho_2(t, h(p)) \Big|_{t=0}$$

es decir $Dh(p) X_1(p) = X_2(h(p))$.

4.6. Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^r , $r \geq 1$ y sea

$A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto. Llamaremos sección transversal local de X a una aplicación de clase C^r , $f : A \rightarrow U$ tal que $\forall a \in A$ $df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ y $X(f(a))$ general $\mathbb{R}^n$.

Sea $\Sigma = f(A)$. si $f : A \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo Σ se dice una sección transversal de X

4.7. Sea $p \in U$ no singular y $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$ base de $\mathbb{R}^n$.

Sea $B(0, \delta)$ bola en $\mathbb{R}^{n-1}$. Entonces para δ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} f : B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) &\rightarrow p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i \end{aligned}$$

es una sección transversal local de X en p .

4.8. Teorema del Flujo Tubular.

Sea $p \in U$, no singular del campo $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k y $f : A \rightarrow \Sigma$ sección transversal local de X de clase C^k con $f(0) = p$.

Entonces existe V vecindad de p en U y un difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de clase C^k con $\varepsilon > 0$ y B una bola abierta de $\mathbb{R}^{n-1}$ con centro en $0 = f^{-1}(p)$ tal que

$$a) h(\bigcup \cap v) = \{0\} \times B$$

b) Si Y es el campo constante $(1, 0, \dots, 0)$ en $\mathbb{R}^n$, entonces h es una C^r -conjugación entre $X|_V$ con $Y|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$

Demostración:

Sea $\rho : D \rightarrow U$ el flujo de X . Definamos

$$F : \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} / (t, f(u)) \in D\} \rightarrow U \text{ por}$$

$F(t, u) = \rho(t, f(u))$. F aplica las rectas $\ell_u = \{(t, u) / t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^n$ en las curvas integrales $\rho(t, f(u))$ de X .

Supongamos que F es un difeomorfismo local en $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ entonces existe $\varepsilon > 0$ y una bola B con centro en 0 en $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que

$F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ es difeomorfismo sobre $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$

sea $h = (F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B})^{-1}$. Entonces

a) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ pues $F(0, u) = \rho(0, f(u)) = f(u)$

$$\forall u \in B \implies F^{-1}(f(u)) = (0, u)$$

b) h^{-1} conjugua Y con X pues usando Lema 4.5. tenemos

$$Dh^{-1}(t, u) Y(t, u) = DF(t, u) (1, 0, \dots, 0) = D_1 F(t, u)$$

$$= D_1 \rho(t, f(u)) = X(\rho(t, f(u))) = X(F(t, u))$$

$$= X(h^{-1}(t, u)) \quad \forall (t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$$

Nos resta ver que F es un difeomorfismo local. Por el Teorema de la función inversa es suficiente probar que $DF(0)$ es un isomorfismo.

$$D_1 F(0) = \frac{d}{dt} \rho(t, f(0)) \Big|_{t=0} = X(\rho(0, p)) = X(p)$$

$$D_j F(0) = D_{j-1} f(0) \quad \forall j=2, \dots, n \text{ pues } \rho(0, f(u)) = f(u) \quad \forall u \in A$$

Luego los vectores $D_j F(0)$, $j = 1, \dots, n$ generan $\mathbb{R}^n$, es decir

$DF(0)$ es un isomorfismo.

4.9. Corolario: Sea Σ sección transversal de X . Entonces $\forall p \in \Sigma$ existen $\varepsilon > 0$, una vecindad V de p en $\mathbb{R}^n$ y una función $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que:

a) $\tau(V \cap \Sigma) = 0$

b) $\forall q \in V$, la curva integral $\rho(t, q)$ de $X|_V$ está definida y es biunívoca en $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$

c) $\xi(q) = \rho(\tau(q), q) \in \Sigma$ es el único punto donde $\rho(t, q)|_{J_q} \cap \Sigma$. En

$$\text{particular } q \in \Sigma \cap V \iff \tau(q) = 0$$

d) $\xi: V \rightarrow \Sigma$ es de clase C^k y $D\xi(q)$ es sobreyectiva $\forall q \in V$

En este Corolario se definen 2 aplicaciones fundamentales: $\tau(q)$ mide el tiempo que queda para llegar a Σ por el flujo de X (o mide el tiempo que pasó desde que el flujo pasó por Σ) y $\xi(q)$ que es el punto por donde pasa el flujo de q por Σ

Usando el Teorema 4.8 intente una demostración de 4.9.

4.10. Observemos que al teorema del flujo tubular es solo local. El siguiente ejemplo muestra que no siempre un campo sin singularidades se puede trivializar.

§.5. ESTRUCTURA LOCAL DE LOS PUNTOS SINGULARES HIPERBOLICOS.

El teorema del flujo tubular describe satisfactoriamente la conducta cualitativa de un campo en torno de un punto regular. Vimos también en el caso de $\mathbb{R}^2$ la estructura en torno de un punto singular de campos lineales simples. Ahora estudiaremos la clase más amplia de campos en los cuales persiste la conducta en torno de una singularidad dada por la parte lineal del campo.

5.1. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p \in U$, punto singular ed $X(p) = 0$

X de clase C^k , $k \geq 1$. p se llama Hiperbólico si todos los autovalores de $DX(p)$ tienen parte real diferente de cero.

5.2. Esta definición no depende de la clase de conjugación local C^2 de X en p . Pues si X e Y son campos de clase C^k , $k \geq 2$ y h una C_2 -conjugación entre X e Y en torno de la singularidad p de X y $q = h(p)$ de Y .

Por el lema de caracterización 4.5 se tiene $Y = Dh \circ h^{-1} \circ X \circ h^{-1}$ es decir

$$DY(q) = D^2 h(h^{-1}(q)) Dh^{-1}(q) X(h^{-1}(q)) \\ + Dh(h^{-1}(q)) DX(h^{-1}(q)) Dh^{-1}(q)$$

$$= 0 + Dh(p) DX(p) [Dh(p)]^{-1}$$

por lo tanto las matrices $DY(q)$, $DX(p)$ son similares, es decir tienen los mismos autovalores.

5.3. El número de autovalores de $DX(p)$ que tienen parte real menor que 0 para un campo hiperbólico en p se llama el índice de estabilidad de X en p .

5.4. Teorema:

Dos sistemas lineales hiperbólicos $x' = Ax$ y $x' = Bx$ en $\mathbb{R}^n$ son topológicamente conjugados si y solamente si ambos tienen el mismo índice de estabilidad.

Demostración:

Si s es el índice de estabilidad, basta demostrar que ambos campos son conjugados al sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 & , \quad x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x_2' = x_2 & , \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n-s} \end{cases}$$

Y esto resulta por la forma simple que tienen los flujos lineales. Para el recíproco hay que usar el Teorema de la invarianza de la dimensión de Brouwer.

El siguiente resultado, uno de los más relevantes en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales generaliza 5.4, es decir el índice determina la clase de conjugación topológica local para campos hiperbólicos.

5.5. Teorema de Hartman:

Sea $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial de clase C^1 en p , punto singular hiperbólico. Entonces existen vecindades V de p en U y W de 0 en $\mathbb{R}^n$ tal que $X|_V$ es topológicamente conjugado a $DX(p)|_W$.

Luego aplicando Teorema 5.4. podemos clasificar localmente los puntos singulares hiperbólicos.

Retrato de Fase de X en p

Retrato de Fase de DX(p) en 0.

La demostración de este Teorema es no trivial y escapa a los objetivos y tiempo! de este cursillo. Una demostración geométrica puede encontrarse en el libro de J. Palis, W. de Melo.

§.6. ESTRUCTURA LOCAL DE ORBITAS PERIODICAS.

6.1. La Transformación de Poincaré.

Sea $\gamma = \{\rho(t, p) / 0 \leq t \leq \tau_0\}$ una órbita periódica de período τ del campo X de clase C^k , $k \geq 1$ definido en $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sea Σ una sección transversal a X en p. $\forall q \in \Sigma$ próximo a p la trayectoria $\rho(t, q)$ esta próxima de γ por la continuidad del flujo.

Definimos $\pi(q)$ como el primer punto donde $\rho(t, q)$ interseca a Σ . Sea $\Sigma_0 = \text{Dominio de } \pi$. Obviamente $p \in \Sigma_0$ y $\pi(p) = p$.

Observemos que las órbitas periódicas de X vecinas de γ corresponden a puntos periódicos de π , que son los puntos $q \in \Sigma_0$ tq $\pi^n(q) = q$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

El comportamiento asintótico de las órbitas de X cerca de γ es también descrito por π . Por ejemplo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p \implies \lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0$$

6.2. Una órbita cerrada γ se llama un atractor periódico ó γ se dice orbitalmente estable cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0 \forall q$ en una vecindad de γ .

6.3. Lema:

$\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo de clase C^k sobre su imagen Σ_1 .

Demostración:

Podemos suponer sin perder generalidad que Σ es una hipersuperficie o una subvariedad diferenciable de dimensión $(n-1)$ de $U \subset \mathbb{R}^n$. Más aun podemos suponer que Σ es un disco de un subespacio vectorial o afin de $\mathbb{R}^n$.

Usaremos el Corolario 4.9 para definir formalmente π .

Sea V una vecindad de p dada por el Corolario 4.9 como

$\rho(\tau_0, p) = p$ existe Σ_0 vecindad de p en Σ tal que

$\rho(\tau_0, q) \in V \forall q \in \Sigma_0$

Sea $\xi : V \rightarrow \Sigma$ definida por 4.9, entonces

$$\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma, q \mapsto \pi(q) = \xi(\rho(\tau_0, q))$$

Otra expresión equivalente para π , es $\pi(q) = \rho(\tau_0 + \tau(\rho(\tau_0, q)), q)$ donde τ está definida en 4.9, $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ es el tiempo $\tau(x)$ que demora la órbita de x en V para interceptar a Σ . Por teorema de la función implícita τ es de clase C^k . Por lo tanto π es de clase C^k . La inversa $\pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ de π está definida tomando el campo $-X$.

$$\pi(q) = \xi(\rho(\tau_0, q)) = \rho(\tau_0 + \tau(\rho(\tau_0, q)), q)$$

6.4. Ciclos Límites en el plano.

Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, U abierto, X de clase C^1 . Una órbita periódica γ de X se llama un ciclo límite si existe una vecindad V de γ tal que γ es la única órbita cerrada de X que intercepta V .

Proposición:

Solo existen los siguientes tipos de ciclos límites en el plano.

a) Ciclo estable: Si $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0 \quad \forall q \in V$

b) Ciclo inestable: Si $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0 \quad \forall q \in V$

c) Ciclo semi-estable: Si $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0$ para todo

$q \in V \cap \text{Exterior de } \gamma$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\rho(t, q), \gamma) = 0 \quad \forall q \in V \cap \text{Interior de } \gamma$

o lo contrario.

Demostración:

Podemos suponer que V no contiene singularidades de X .

Sea $p \in \gamma$ y Σ una sección transversal a X en p .

Sea $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ transformación de Poincaré. Supongamos que Σ está orde
nada en el sentido positivo desde el Ext. al Int.

Dado $q \in \Sigma_0 \cap \text{Ext } \gamma$ tenemos $\pi(q) > q$ ó $\pi(q) < q$

Supongamos $\pi(q) > q$. Consideremos la región A acotada por γ , por el arco de trayectoria $\overline{q\pi(q)}$ y por el segmento $\overline{q\pi(q)} \in \Sigma_0$

A es positivamente invariante, es decir, $\forall x \in A, \rho(t, x) \in A$

$\forall t \geq 0$. Más aun $\rho(t, x)$ intercepta Σ en una sucesión estrictamente monótona de puntos x_n que converge a p , es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, x), \gamma) = 0$$

Si $\pi(q) < q$ consideremos el campo $-X$ y allí se concluye

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t, x), \gamma) = 0 \quad \forall x \in A$$

Lo mismo se puede hacer para Int. de γ y combinando las posibilidades resulta a), b) y c).

6.5. Lema:

a) γ es un ciclo límite si y solo si p es un punto fijo aislado de π .

b) γ es estable si y solo si $|\pi(x)-p| < |x-p| \quad \forall x \neq p, x \in \Sigma_0$

c) γ es inestable si y solo si $|\pi(x)-p| > |x-p| \quad \forall x \neq p, x \in \Sigma_0$

d) γ es semi-estable si y solo si $|\pi(x)-p| < |x-p| \quad \forall x \in \Sigma \cap \text{Ext } \gamma$
 próximo de p, $|\pi(x)-p| > |x-p| \quad \forall x \in \Sigma \cap \text{Int } \gamma$, próximo de p
 ó el contrario

Demostración:

Obvia.

6.6. Lema:

- a) Si $\pi'(p) < 1 \implies \gamma$ es estable
 b) Si $\pi'(p) > 1 \implies \gamma$ es inestable

Demostración:

Aplicar el Teorema del Valor Medio y usar 6.5. Veremos ahora una condición suficiente para que una órbita periódica sea un ciclo límite estable.

6.7. Teorema:

$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo de clase C^1 . γ una órbita periódica de período T y $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ transformación de Poincaré en una sección transversal Σ en $p \in \gamma$. Entonces

$$\pi'(p) = \exp \left[\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right]$$

donde $\operatorname{div} X(x) = D_1 X_1(x) + D_2 X_2(x)$

En particular:

$$\text{Si } \int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0 \implies \gamma \text{ es estable}$$

$$\text{Si } \int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt > 0 \implies \gamma \text{ es inestable}$$

Demostración:

Recordemos que cuando tenemos una ecuación diferencial lineal $x' = A(t)x$ y si $\phi(t)$ es una matriz cuyas columnas son soluciones, entonces $\forall t \in I, t_0 \in I$ fijo

$$\det \phi(t) = \det [\phi(t_0)] \exp \int_{t_0}^t \operatorname{Traza} A(s) ds$$

Pongamos $A(t) = DX(\gamma(t))$ y sea $\phi(t)$ matriz fundamental de $x' = A(t)x$ con $\phi(0) = I$ identidad, entonces

$$\det \phi(T) = \exp \int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt$$

demostramos $\pi'(p) = \det \phi(T)$

Como $D_1 D_2 \rho(T, p) = DX(\rho(T, p)) D_2 \rho(T, p) = DX(p) D_2 \rho(T, p)$

es decir $D_2 \rho(T, p)$ satisface $x' = DX(p)x$, luego por unicidad

$$\phi(T) = D_2 \rho(T, p)$$

Notemos que $D_2 \rho(T, p) \cdot X(p) = X(p)$ pues

$$\frac{d}{dt} \rho(T, \rho(t, p)) \Big|_{t=0} = D_2 \rho(T, \rho(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \rho(t, p) \Big|_{t=0}$$

$$= D_2 \rho(T, p) X(p) \quad \text{y por otro lado}$$

$$\frac{d}{dt} \rho(T, \rho(t, p)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \rho(T+t, p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \rho(t, p) \Big|_{t=0} = X(p)$$

Por otro lado sea $g: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Sigma$ una parametrización de Σ tal que $g(0) = p$.

$B = \{X(p), g'(0)\}$ es una base $\mathbb{R}^2$ por definición de Σ

y $\pi(g(s)) = \rho(T + \tau(\rho(T, s)), g(s))$, entonces

$$\pi'(p) \cdot g'(0) = \frac{d}{ds} \pi \circ g(s) \Big|_{s=0} = D_1 \rho(T, p) \cdot a + D_2 \rho(T, p) \cdot g'(0)$$

$$= a X(p) + D_2 \rho(T, p) \cdot g'(0)$$

donde a es $\frac{d}{ds} \tau(\rho(T, g(s))) \Big|_{s=0}$. Luego

$D_2 \rho(T, p) g'(0) = \pi'(p) g'(0) - aX(p)$ Entonces la matriz de

$D_2 \rho(T, p)$ en la base B es

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \pi'(p) \end{pmatrix}$$

Luego $\det \phi(T) = \pi'(p)$ lo que queríamos.

§.7. FLUJOS LINEALES EN EL TORO.

Estudiaremos ahora un campo no hiperbólico. Los flujos de campos vectoriales lineales con valores propios puramente imaginarios conduce al estudio de flujos en Superficies Toroidales.

Consideremos en $\mathbb{R}^4$ en siguiente sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = -\alpha x_2 \\ x_2' = \alpha x_1 \\ x_3' = -\beta x_4 \\ x_4' = \beta x_3 \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

En coordenadas complejas $z_1 = x_1 + i x_2$, $z_2 = x_3 + i x_4$

$$(2) \quad \begin{cases} z_1' = i\alpha z_1 \\ z_2' = i\beta z_2 \end{cases}$$

El flujo es $\rho(t, z_1, z_2) = (z_1 e^{i\alpha t}, z_2 e^{i\beta t})$

Sean $r_1, r_2 > 0$ y sean $z_1^0, z_2^0 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1^0| = r_1$, $|z_2^0| = r_2$

La imagen de la curva $t \rightarrow z_1^0 e^{i\alpha t}$ está contenida en

$C_1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = r_1\}$. Análogamente la curva $t \rightarrow z_2^0 e^{i\beta t}$ está contenida en $C_2 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = r_2\}$

Por lo tanto el Toro $T_2 = C_1 \times C_2$ de $\mathbb{R}^4$ es invariante por el flujo ρ .

Las soluciones de (1) que están contenidas en T^2 son imagen por la aplicación $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$, $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow (r_1 e^{2\pi i \theta_1}, r_2 e^{2\pi i \theta_2})$ de las soluciones del sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

$$\theta_1' = \alpha/2\pi$$

$$\theta_2' = \beta/2\pi$$

Sea $C = 1 \times C_2 \subset \mathbb{C}^2$. $\forall (1, z_2^0) \in C$ la órbita $\rho(t, 1, z_2^0)$ intersepta C en una sucesión de puntos $(1, z_2^{(n)})$ dada por

$$z_2^{(n)} = z_2^0 e^{2\pi i n \beta / \alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En realidad estos puntos son los iterados $\pi^n(z_2^0)$ por la transformación de Poincaré.

$$\pi : C \rightarrow C, \quad \pi(z) = z e^{2\pi i \beta / \alpha}$$

7.1. Teorema:

Si β/α es racional, todas las órbitas de (2) contenidas en T^2 son periódicas.

Si β/α es irracional, ellas son densas en T^2 .

Demostración:

Sea $\beta/\alpha = p/q$ donde p y q son relativamente primos con $q > 0$. Entonces todas las órbitas de π tienen período q , lo que significa que las órbitas de (2) son periódicas de período $2\pi/q$

Si β/α es irracional. Fijemos $z_2^0 \in C_2$ y probemos que la sucesión $\pi^n(z_2^0)$ es densa en el círculo, lo cual es verdadero pues el subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ generado por $\{1, \beta/\alpha\}$ es denso en $\mathbb{R}$.