REVISTA PROYECCIONES N° 10:157-159
 Diciembre 1985 - ISSN 0716-0917
 Jornada Matemáticas, Agosto 1985.

RESULTADOS GENERALES DE APROXIMACION EN LOS ESPACIOS DE SOBOLEV

PEDRO HUERTA MARIN*

Si (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange, a toda función de finida sobre K se asocia la función $\Pi_{v,P}$ - interpolando de Lagrange de v sobre Σ . Por estudiar el error de interpolación $v - \Pi_{v,P}$.

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, conexo, $K^\circ \neq \emptyset$. Denotaremos por $H^m(K)$ al espacio de Sobolev $H^m(K)$. Si E es un subespacio de $H^m(K)$, el espacio cociente $H^m(K)/E$ es el conjunto de las clases de equivalencia $\dot{v}$ de las funciones de $H^m(K)$ módulo la relación de equivalencia $\mathbb{R}$, $(v_1 \mathbb{R} v_2 \iff v_1 - v_2 \in E)$.

Un primer resultado importante es: si E es un subespacio cerrado de $H^m(K)$, el espacio $H^m(K)/E$ dotado de la norma cociente

$$\|\dot{v}\| = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{m,K} \quad \text{es un espacio de Hilbert.}$$

* Departamento de Matemáticas, Universidad de Antofagasta, Antofagasta.

Se puede introducir entonces el espacio $H^m(K)/P_k$ ($k \geq 0$, P_k : espacio de los polinomios de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ de grado $\leq k$), nos interesa dotar a este espacio de una norma más manejable que la norma cociente. Para este efecto se prueba:

TEOREMA: Sea K un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces, para todo entero $k \geq 0$, la aplicación

$\dot{v} \rightarrow |\dot{v}|_{k+1,k} = |v|_{k+1,k}$, donde v es un representante cualquiera de $\dot{v}$ en $H^{k+1}(K)$ es una norma sobre $H^{k+1}(K)/P_k$ equivalente a la norma cociente.

Esto permite entregar el siguiente resultado general de aproximación en los espacios de Sobolev.

TEOREMA: Sea K un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\mathcal{C}^1$ por pedazos y sea Π un operador lineal continuo de $H^{k+1}(K)$ sobre $H^m(K)$, $0 \leq m \leq k+1$, tal que: $\forall p \in P_k, \Pi p = p$.

Entonces existe una constante $C = C(K, \Pi)$ tal que:

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad \left\| v - \Pi v \right\|_{m,k} \leq C \left\| v \right\|_{k+1,k}$$

Con el propósito de explicitar la dependencia de la constante c en función de las características geométricas de K , se introduce un subconjunto compacto $\hat{K}$ de $\mathbb{R}^n$, conexo y de frontera $\mathcal{C}^1$ por pedazos, que actuará como dominio de referencia. Se supone además que existe una transformación afín invertible F , tal que $x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ (B es una matriz invertible de orden n y b es un vector de $\mathbb{R}^n$) y además $K = F(\hat{K})$.

Denotando por:

h_k : Máximo de las distancias euclidianas entre 2 puntos de K (respectivamente $\hat{h}_k$)

ρ_k : Diámetro máximo de las esferas contenidas en K (respectivamente ρ_k)

y usando la norma espectral:

$$||B|| = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R}^n \\ \xi \neq 0}} \frac{|B\xi|}{|\xi|}, \quad (|\xi|: \text{ norma euclidiana de } \xi \text{ en } \mathbb{R}^n)$$

se pueden probar las desigualdades:

$$\text{i) } ||B|| < \frac{1}{\hat{\rho}_k} h_k \quad \text{y} \quad \text{ii) } ||B^{-1}|| \leq \hat{h}_k \frac{1}{\rho_k}, \text{ mediante}$$

las cuales se puede justificar el resultado principal.

TEOREMA: Sea $\hat{K}$ un subconjunto compacto y conexo de $\mathbb{R}^n$ de frontera $\mathcal{C}^1$ por pedazos y sea $\hat{\Pi}$ un operador lineal continuo de $H^{k+1}(\hat{K})$ en $H^m(\hat{K})$, $0 \leq m \leq k+1$, tal que: $\forall \hat{p} \in P_k$, $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}$.

Si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que existe una transformación afín invertible F de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ para la cual $K = F(\hat{K})$ y si el operador $\tilde{\Pi}$ está definido por: $\forall v \in H^{k+1}(K)$, $\hat{\Pi}\hat{v} = \tilde{\Pi}\hat{v}$.

Entonces existe una constante C independiente de F tal que

$$\forall v \in H^{k+1}(K), \quad |v - \tilde{\Pi}v|_{m,k} \leq C \frac{h_k^{k+1}}{\rho_k^m} |v|_{k+1,K}.$$