CARACTERIZACION DE MINIMOS RESTRINGIDOS*

Fernando Paredes C.**

INTRODUCCION.

El objetivo de esta conferencia es caracterizar las soluciones del problema:

$$P) \quad \inf_{x \in Q} f(x) \quad ,$$

donde $Q \subseteq X = \mathbb{R}^n$, $Q \neq \emptyset$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, es decir, f será una función definida en $\mathbb{R}^n$ a valores en $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Además suponemos f finita en Q y $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma euclídeana habitual. El producto interior lo denotaremos por: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

* Conferencia del Encuentro de Matemática de la Zona Norte, Universidad del Norte, 1985.

** Profesor Instituto de Matemática Facultad de Ciencias Básicas y Matemáticas, Universidad Católica de Valparaíso.

1. PRELIMINARES TEORICOS.

Definición 1.1.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Se define la derivada direccional de f en x_0 en la dirección $x \in X$, que denotaremos $f'(x_0; x)$, mediante:

$$f'(x_0; x) := \lim_{\substack{\lambda > 0 \\ \lambda \rightarrow 0}} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda}$$

Es claro que este límite no siempre existe.

Si existe $y_0 \in X$ tal que: $f'(x_0; x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \forall x \in X$, entonces diremos que f es Gateaux - derivable (G-derivable) en x_0 .

Teorema 1.2.

Si f es diferenciable en x_0 con derivada $f'(x_0)$ entonces f es G-derivable en x_0 y se tiene:

$$f'(x_0; x) = \langle x, f'(x_0) \rangle \quad \forall x \in X.$$

Definición 1.3.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Se define el subdiferencial de f en x_0 , que denotaremos $\partial f(x_0)$, mediante:

$$\partial f(x_0) := \{y \in X / f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, y \rangle, \quad \forall x \in X\}.$$

Este conjunto eventualmente puede ser vacío, y en este caso diremos que f no es subdiferenciable en x_0 .

Teorema 1.4.

Sea $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ convexa y finita en x_0 entonces $\forall x \in X$ $f'(x_0; x)$ existe (eventualmente es igual a $-\infty$) y se tiene:

$$f'(x_0; x) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x_0 + \lambda x) - f(x_0)}{\lambda}$$

Si además f es continua en x_0 , entonces:

- a) $\partial f(x_0)$ es un conjunto convexo, compacto y no vacío
- b) $f'(x_0; x) = \max_{y \in \partial f(x_0)} \langle x, y \rangle$

Definición 1.5.

- a) Diremos que f es cuasiconvexa sobre Q si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto:

$$S_\lambda = \{x \in Q / f(x) \leq \lambda\} \text{ es convexo.}$$

- b) Diremos que f es pseudoconvexa sobre Q si f es G-derivable sobre Q y:

$$\forall x, y \in Q : \langle y-x, f'(x) \rangle \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y), \text{ donde } f' \text{ denota la derivada de GATEAUX.}$$

Si $Q = X$, en las definiciones anteriores se elimina el término sobre Q .

Nota: f convexa sobre Q si y sólo si $f + \chi_Q$ es convexa, donde:

$$\chi_Q(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in Q \\ +\infty, & \text{si } x \notin Q. \end{cases}$$

2. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE OPTIMALIDAD.

Definición 2.1.

Sea $x \in Q$. Llamaremos conjunto de desplazamientos admisibles al conjunto denotado por $D(Q;x)$ y definido mediante:

$$D(Q;x) := \{y \in X / \exists \varepsilon > 0 : \eta \in]0, \varepsilon[\Rightarrow x + \eta y \in Q\}.$$

Nota: Cuando Q es convexo se tiene:

$$D(Q;x) = \{y \in X / \exists z \in Q, \lambda > 0 : y = \lambda(z-x)\}.$$

Teorema 2.2.

Supongamos que $\forall x \in Q$ y $\forall d \in D(Q;x)$ la derivada direccional $f'(x;d)$ existe. Una condición necesaria para que $\bar{x}$ realice el mínimo de f sobre Q es que:

$$\bar{x} \in Q \text{ y } f'(\bar{x};d) \geq 0 \quad \forall d \in D(Q;\bar{x}). \quad (1)$$

Si Q es convexo entonces la condición (1) se traduce en:

$$f'(\bar{x};x-\bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in Q, \quad (2)$$

y es suficiente si f es convexa sobre Q .

Nota: Si $Q = X$ y si f es G-derivable entonces (2) es equivalente a:

$$f'(\bar{x}) = 0. \quad (3)$$

Un punto $\bar{x}$ que verifica ya sea (1), (2) ó (3) lo llamaremos punto estacionario.

Teorema 2.3.

Sea $x \in Q$ y $d \in D(Q;x)$. Si $f'(x;d) > 0$ entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que: $\eta \in]0, \varepsilon[\Rightarrow f(x+\eta d) > f(x)$.

Demostración:

Supongamos lo contrario, entonces existe $\{\lambda_n\}$ sucesión de reales positivos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ y

$$\frac{f(x + \lambda_n d) - f(x)}{\lambda_n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ luego}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \lambda_n d) - f(x)}{\lambda_n} = f'(x;d) \leq 0, \text{ con lo cual se tiene una}$$

contradicción. #

Supongamos que $Q = \{x \in X / f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, r\}$ donde las $f_i \in \mathbb{R}^X$ y son G-derivables sobre X con derivada de Gateaux f'_i . Se define el siguiente conjunto:

$$T(Q;x) = \{d \in X / \langle d, f'_i(x) \rangle \leq 0, i \in I(x)\},$$

donde $I(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, r\} / f_i(x) = 0\}$; llamado conjunto de índices que representan las restricciones activas.

Nota: $T(Q;x)$ resulta ser siempre un conjunto cerrado.

Teorema 2.4.

$$\forall x \in Q : \overline{D(Q;x)} \subset T(Q;x)$$

Demostración:

Sea $d \in D(Q;x)$ y sea $i \in I(x)$. Si $\langle d, f'_i(x) \rangle > 0$ entonces por teorema 2.3. existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\lambda \in]0, \varepsilon[\Rightarrow f_i(x + \lambda d) > f_i(x) = 0.$$

Luego $d \notin D(Q;x)$ y en consecuencia $d \in T(Q;x)$, es decir,

$$D(Q;x) \subset T(Q;x)$$

$$\therefore \overline{D(Q;x)} \subset T(Q;x) \quad \#$$

Definición 2.5.

Llamaremos hipótesis de calificación de restricciones a la condición:

$$\overline{D(Q;x)} = T(Q;x) \quad \forall x \in Q.$$

Nota: Si las funciones f_i son convexas y existe $x_0 \in X$ tal que: $f_i(x_0) < 0 \quad i = 1, \dots, r$, es posible demostrar que se satisface la hipótesis de calificación de restricciones.

Lema 2.6. (Minkowski - Farkas)

Sean $a_i \in X$, $i = 1, \dots, r$ y $x \in X$. Entonces:
 $\langle a_i, x \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, r \Rightarrow \langle a_0, x \rangle \leq 0$ si y sólo si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = a_0$$

Demostración: [5]

Teorema 2.7. (Kuhn - Tucker)

Sea f G -derivable en Q con derivada de Gateaux f' .
Supongamos que se satisface la hipótesis de calificación de restricciones.
Una condición necesaria para que $\bar{x} \in Q$ sea un punto estacionario es que exista $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(\bar{x})$ llamados multiplicadores de Kuhn - Tucker tal que:

$$f'(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i f'_i(\bar{x}) = 0.$$

Recíprocamente si f es pseudoconvexa sobre Q , f_i cuasiconvexa sobre Q $i = 1, \dots, r$ y si $\bar{x} \in Q$ entonces (4) es una condición suficiente de minimalidad de f sobre Q en $\bar{x}$.

Demostración:

Si $\bar{x}$ es un punto estacionario entonces de acuerdo a la hipótesis de calificación de restricciones se tiene:

$\langle d, f'_i(\bar{x}) \rangle \leq 0$, $i \in I(\bar{x}) \Rightarrow \langle d, f'(\bar{x}) \rangle \geq 0$, luego aplicando el lema 2.6. se tiene la condición (4).

Recíprocamente la cuasiconvexidad de las funciones f_i sobre Q hace que Q sea convexo. En consecuencia $\forall x \in Q$ se tiene que el segmento $[x, \bar{x}] \in Q$ y la dirección $d = x - \bar{x}$ pertenece a $D(Q; \bar{x})$ y de acuerdo a la hipótesis de calificaciones se tiene entonces:

$$\langle x - \bar{x}, f'(\bar{x}) \rangle \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Como $\bar{x}$ verifica la condición (4) entonces se tiene:

$$\langle \bar{x} - \bar{x}, f'(\bar{x}) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in Q.$$

Luego debido a la pseudoconvexidad de f se tiene que $\bar{x}$ es un punto estacionario. #

Para el caso convexo no diferenciable los dos teoremas siguientes caracterizan las soluciones del problema P):

Teorema 2.8.

Sean f, f_i $i = 1, \dots, r$ funciones convexas en $\mathbb{R}^X$ (resp. G-derivables) y supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que:

$$f_i(x_0) < 0 \quad i = 1, \dots, r.$$

Entonces una condición necesaria y suficiente para que $\bar{x} \in Q$ realice el mínimo de f sobre Q es que existan $\lambda_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $i \in I(\bar{x})$ tal que:

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i f'_i(\bar{x}).$$

$$[\text{resp.}] \quad f'(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i f'_i(\bar{x}) = 0.$$

Demostración: [2]

Teorema 2.9.

Sea Q un convexo cerrado, $f \in \Gamma_0(X)$. Supongamos que existe $x_0 \in \text{Int}(Q)$ tal que f sea finita y continua en x_0 . Una condición

necesaria y suficiente para que $\bar{x} \in Q$ realice el mínimo de f sobre Q es que exista $\bar{c} \in \partial f(\bar{x})$ tal que:

$$\langle y - \bar{x}, \bar{c} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Q.$$

Demostración:

Definamos $\psi = f + \chi_Q$; entonces $\bar{x} \in Q$ realiza el mínimo de f sobre Q si y sólo si $0 \in \partial \psi(\bar{x})$. Debido al teorema 4.10. de [1], se tiene: $\partial \psi(x) = \partial f(x) + \partial \chi_Q(x)$ y en consecuencia $0 \in \partial \psi(\bar{x})$ si y sólo si existe $\bar{c} \in \partial f(\bar{x})$ tal que $-\bar{c} \in \partial \chi_Q(\bar{x})$.

Como $\partial \chi_Q(\bar{x}) = \{d \in X / \langle y - \bar{x}, d \rangle \leq 0 \quad \forall y \in Q\}$ se tiene que: existe $\bar{c} \in \partial f(\bar{x})$ tal que:

$$\langle y - \bar{x}, \bar{c} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Q.$$

Nota: $\Gamma_0(X) := \{f \in \mathbb{R}^X / f \text{ convexa, s.c.i., no idénticamente igual a } +\infty \text{ y no toma jamás el valor } -\infty\}$. #

COMENTARIOS:

En esta conferencia sólo hemos abordado la caracterización de soluciones del problema P) bajo ciertas hipótesis impuestas a f y a Q . De todas maneras es importante señalar que existe una gran variedad de problemas prácticos donde es necesario aplicar este tipo de caracterizaciones. Por ejemplo en [4] se resuelve el problema de la proyección de un punto sobre un convexo cerrado definido por un número finito de semi-espacios cerrados, utilizando en gran medida el teorema 2.7.

En [2], se desarrolla una gran variedad de métodos numéricos para resolver el problema P). Para la caracterización de soluciones de problemas de optimización que surgen en problemas variacionales se recomienda ver [2] y [3].

BIBLIOGRAFIA.

- (1) Aguila R., Paredes F.: "Análisis Convexo y Dualidad en Optimización" cursillo IV Jornadas de Matemáticas, U. del Norte, Antofagasta, 1985.
- (2) Auslender, A.: "Optimization, Methodes Numériques" Masson Paris 1976.
- (3) Ekeland I., Teman R.: "Convex Analysis and Variational Problems" North Holland Publ. Comp, 1976.
- (4) Paredes F.: "Experiencia Computacional sobre un nuevo Algoritmo de Activación de restricciones para problemas cuadráticos convexos de gran tamaño" Sigma Vol. 5 N° 3 y 4 - Octubre 1979.
- (5) Rockafellar R.T.: "Convex Analysis" Princeton Univ. Press, 1970.