UNA VERSIÓN CONTINUA DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE**

OSCAR ROJO JERALDO*

1. INTRODUCCION:

En este trabajo deseamos presentar los avances logrados en la solución de un problema propuesto por R. Bellman en 1970 [1]. El problema de Bellman es: Dado un núcleo $K(x,y)$ definido y continuo en el cuadrado $I \times I$, $I = [0,1]$, encontrar un par de funciones continuas $f(x)$ y $g(y)$ tal que

$$f(x) + g(y) \geq K(x,y), \quad y \quad (1)$$

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(y)dy \quad \text{es mínimo} \quad (2)$$

* Académico Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Norte.

** Conferencia Inaugural del Encuentro de Matemáticas de la Zona Norte, Universidad del Norte, 1985.

Consideremos primeramente una aparente generalización de este problema. El cuadrado es reemplazado por el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ y la función a minimizar por

$$F(f,g) = \int_a^b f(x)\alpha(x)dx + \int_c^d g(y)\beta(y)dy \quad (3)$$

donde las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(y)$ son positivas, continuas y satisfacen

$$\int_a^b \alpha(x)dx = \int_c^d \beta(y)dy \quad (4)$$

Un par $(f(x), g(y))$ es llamado un par admisible en $[a,b] \times [c,d]$ si y sólo $(f(x), g(y))$ es un par de funciones continuas y $f(x) + g(y) \geq K(x,y)$ en $[a,b] \times [c,d]$. Un par admisible en $[a,b] \times [c,d]$ tal que la funcional F dada en (3) sea mínima es llamado un par minimal en $[a,b] \times [c,d]$. Es claro que si c es una constante positiva y (f,g) un par minimal para el núcleo K , (cf, cg) es un par minimal para el núcleo cK . Además, si (f,g) es un par minimal entonces $(f - c, g + c)$ es también un par minimal cualquiera sea la constante c . Así, no podemos esperar un teorema de unicidad a menos que introduzcamos una condición de normalización:

$$\int_a^b f(x)\alpha(x)dx = \int_c^d g(y)\beta(y)dy \quad (5)$$

Es claro que sumando y restando una constante apropiada de f y g respectivamente, cualquier par minimal puede ser normalizado.

Ahora mostramos que la versión generalizada es equivalente al problema de Bellman como inicialmente fue enunciado. Supongamos que re solvemos las ecuaciones diferenciales

$$\frac{du}{dx} = A\alpha(x) \quad , \quad \frac{dv}{dy} = A\beta(y)$$

con las condiciones iniciales

$$u(a) = v(c) = 0$$

y la constante A escogida tal que

$$u(b) = v(d) = 1$$

Esto último es posible gracias a la ecuación (4). Entonces $u(x)$ mapea el intervalo $[a,b]$ sobre $[0,1]$ y $v(y)$ mapea $[c,d]$ sobre $[0,1]$.

Ambas funciones son invertibles; por lo tanto, el cambio de variables es tablece una correspondencia uno a uno entre las funciones continuas defi nidas en $[a,b]$ o $[c,d]$ y $[0,1]$:

$$f(x) \leftrightarrow f^*(u) = f(x(u))$$

$$g(y) \leftrightarrow g^*(v) = f(y(v))$$

Análogamente, cualquier núcleo $K(x,y)$ definido en $[a,b] \times [c,d]$ llega a ser un núcleo $K^*(u,v) = K(x(u), y(v))$ definido en el cuadrado unitario, y la funcional a ser minimizada llega a ser

$$F^*(f^*, g^*) = \int_0^1 f^*(u) du + \int_0^1 g^*(v) dv$$

Observamos que (f^*, g^*) es admisible exactamente cuando (f, g) es admisible, así entonces el problema en su versión generalizada es transformable a la versión original por un cambio de variables verificándose que (f, g) es minimal para K si y sólo (f^*, g^*) es minimal para K^* .

2. EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

En el problema de transporte es dado una matriz K de orden $n \times m$ y vectores R y C , n -dimensional y m -dimensional respectivamente, con la propiedad que la suma de las componentes de R es igual a la suma de las componentes de C . Una matriz U es admisible si y sólo si sus elementos son no-negativos, la suma de los elementos en la i -ésima fila es igual a R_i (i -ésima componente del R), y la suma de los elementos en la j -ésima columna es igual a C_j (j -ésima componente de C). El problema es minimizar

$$\phi(U) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m U(i, j) K(i, j)$$

sobre el conjunto de las matrices admisibles. Así como ha sido enunciado, $K(i, j)$ es el costo de transporte de un artículo desde el origen i al destino j , R_i es el número de artículos que deben ser despachados desde el origen i y C_j es el número total de artículos que deben arriivar al destino j , $U(i, j)$ es el número de artículos a transportar desde el origen i al destino j ; y, por lo tanto, $\phi(U)$ es el correspondiente costo de transporte. En este contexto los elementos de K, R, C y U son enteros no-negativos.

Decimos que un par de vectores F y G es admisible si y sólo si

$$F_i + G_j \leq K(i, j) \quad \text{para todo } i \text{ y } j.$$

El problema de transporte dual es: Maximizar

$$\Psi(F,G) = \sum_{i=1}^n F_i R_i + \sum_{j=1}^m G_j C_j$$

sobre el conjunto de pares admisibles.

Los hechos importantes son:

(A) Si (F,G) y U son admisibles entonces

$$\psi(F,G) \leq \phi(U)$$

Demostración:

$$\sum_i \sum_j U(i,j) K(i,j) \geq \sum_i \sum_j U(i,j) F_i + \sum_i \sum_j U(i,j) G_j = \sum_i F_i R_i + \sum_j G_j C_j$$

Decimos que U y (F,G) son compatibles si y sólo si

$$U(i,j)[K(i,j) - F_i - G_j] = 0 \text{ para todo } (i,j). \text{ Es claro}$$

que:

(B) Si U y (F,G) son compatibles y U admisible entonces $\Psi(F,G) = \phi(U)$; y que, si U y (F,G) son admisibles y $\Psi(F,G) = \phi(U)$ entonces U y (F,G) son compatibles.

De (A) se sigue: si (F,G) es un par admisible entonces $\Psi(F,G)$ es una cota inferior para los valores de $\phi(U)$, y si U es admisible entonces $\phi(U)$ es una cota superior para los valores de $\Psi(F,G)$. Por lo tanto,

(C) Si U_0 y (F_0, G_0) son compatibles y admisibles, U_0 resuelve el problema de transporte y (F_0, G_0) resuelve el problema dual.

Existen dos algoritmos standard para resolver el problema de transporte.

Método 1 (Primal-Dual). Construir una sucesión de matrices admisibles U_n , cada una de las cuales determina de manera única un par compatible (F_n, G_n) . Si este par es admisible entonces es una solución del problema dual. Si no, se usa la información lograda al probar admisibilidad, para construir una nueva matriz admisible U_{n+1} con un menor valor para ϕ .

Método 2 (Ford-Fulkerson). Construir una sucesión de pares admisibles (F_n, G_n) , cada uno de los cuales determina una matriz compatible U_n . Si U_n es admisible entonces es una solución del problema de transporte y (F_n, G_n) es una solución del problema dual. Si no, podemos encontrar un nuevo par (F_{n+1}, G_{n+1}) con un mayor valor para ψ .

Cualquier discretización razonable del problema de Bellman conduce a un problema equivalente al problema dual de transporte. Así entonces los métodos standard para el problema de transporte y su dual pueden ser usados para resolver aproximadamente el problema de Bellman. En este momento podríamos preguntarnos si existe un dual para el problema de Bellman, al cual razonablemente podríamos llamar "el problema continuo de transporte". El análogo obvio es: Una función $u(x,y)$ no-negativa y continua es llamada admisible si y sólo si

$$\int_a^b u(x,y)dx = \beta(y) \quad \text{y} \quad \int_c^d u(x,y)dy = \alpha(x).$$

Sea $H(u) = \int_a^b \int_c^d K(x,y)u(x,y)dxdy$. El problema es maximizar H

sobre el conjunto de funciones admisibles $u(x,y)$.

3. PROPIEDADES GENERALES.

Sea $I = [a, b]$. Los operadores T_1 y T_2 son definidos como sigue

$$(T_1 f)(y) = \sup_{x \in I} \{K(x, y) - f(x)\}$$

$$(T_2 f)(x) = \sup_{y \in I} \{K(x, y) - f(y)\}.$$

Un par (f, g) es llamado un par estacionario si y sólo si $f = T_2 g$ y $g = T_1 f$. Si K es simétrico, es decir, si $K(x, y) = K(y, x)$, y si (f, f) es un par estacionario diremos que f es un punto fijo de K .

Chattopadhyay [2] observó que cualquier par minimal es estacionario, y propuso el siguiente algoritmo que converge en algunos casos a la solución del problema de Bellman:

Comenzar con un par admisible (f_0, g_0) y construir la sucesión $\{(f_{n+1}, g_{n+1})\}$ donde

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} (f_n + T_2 g_n)$$

$$g_{n+1} = \frac{1}{2} (g_n + T_1 f_n).$$

Si K es simétrico, el esquema iterativo anterior llega a ser:

Comenzar con un par admisible (f_0, f_0) y construir la sucesión $\{f_{n+1}\}$ donde

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} (f_n + T f_n), \quad T = T_1 = T_2.$$

El siguiente teorema es el principal resultado en el artículo de Chattopadhyay.

Teorema 1. La sucesión $\{(f_n, g_n)\}$ construida usando el esquema iterativo anterior converge a un par estacionario.

Demostración: [1].

Teorema 2. Si K es simétrico y $\frac{1}{2} K(x,y)$ es un punto fijo de K entonces es el único punto fijo de K .

Demostración: [3].

Ejemplo 1. $K(x,y) = xy$. Este ejemplo es dado en el artículo de Chattopadhyay con $I = [0,1]$. Claramente

$$\frac{x^2}{2} = \sup_{y \in I} \left\{ xy - \frac{y^2}{2} \right\} \quad \text{para cualquier intervalo } I.$$

Entonces, $\frac{1}{2} K(x,x) = \frac{1}{2} x^2$ es el único punto fijo de $K(x,y) = xy$ en cualquier intervalo I . Luego es el límite de toda sucesión construida según el algoritmo de Chattopadhyay inicializado con (f_0, f_0) admisible.

El siguiente ejemplo dado en [3] muestra como un cambio de signo en el núcleo $K(x,y) = xy$ da origen a una situación totalmente diferente. El núcleo $-xy$ tiene infinitos puntos fijos y el algoritmo de Chattopadhyay casi con toda seguridad convergerá a uno de un número infinito de puntos fijos no minimales.

Ejemplo 2. $K(x,y) = -xy$, $I = [0,1]$. Comenzamos con $f_0(x) = t(\frac{1}{2} - x)$.

Dado que $t - tx - ty + xy \geq t(1 - x - y + xy) = t(1 - x)(1 - y) \geq 0$, (f_0, f_0) es un par admisible en $I \times I$ para todo $0 \leq t \leq 1$. Puede probarse que con esta inicialización el algoritmo de Chattopadhyay produce una sucesión en la cual

$f_n(0) = \frac{t}{2}$ y $f_n(1) = -\frac{t}{2}$ para todo n . En el límite tenemos un punto fijo f_t con $f_t(0) = \frac{t}{2}$ y $f_t(1) = -\frac{t}{2}$. Claramente, estos puntos fijos son diferentes. Así, la ecuación funcional $f = Tf$ tiene infinitas soluciones. Los valores $t = 0$, $t = 1$ y $t = \frac{1}{2}$ son particularmente interesantes. Para $t = 0$ y $t = 1$ obtenemos 0 y $\frac{1}{2} - x$, respectivamente, los cuales son los únicos puntos fijos lineales de $-xy$ en $[0,1]$. Para $t = \frac{1}{2}$, $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}$, el cual es el único punto fijo minimal en $[0,1]$ entre las funciones diferenciales (ejemplo 4).

El siguiente teorema es dado en [3] en una forma ligeramente diferente. Decimos que un núcleo $K(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$ admite una descomposición básica a lo largo de la diagonal $y = \varphi(x)$ si y sólo existe un par (f,g) admisible en $[a,b] \times [c,d]$ tal que

$f(x) + g(\varphi(x)) = K(x, \varphi(x))$ para todo $x \in [a,b]$, donde $y = \varphi(x)$ es la ecuación de una de las diagonales del rectángulo $[a,b] \times [c,d]$.

Teorema 3. Si K es diferenciable y admite una descomposición básica a lo largo de $y = \varphi(x)$ dada por el par (f,g) entonces

(a) (f,g) es el único par minimal diferenciable para la funcional

$$F(f,g) = \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{d-c} \int_c^d g(y)dy$$

$$(b) \quad f'(x) = K_x(x, \varphi(x))$$

$$g'(y) = K_y(\varphi^{-1}(y), y)$$

Demostración:

(a) Sea (p, q) un par admisible. Entonces,

$$p(x) + q(\varphi(x)) \geq K(x, \varphi(x)).$$

De donde,

$$\begin{aligned} \int_a^b [p(x) + q(\varphi(x))] dx &\geq \int_a^b K(x, \varphi(x)) dx = \\ &= \int_a^b [f(x) + g(\varphi(x))] dx \end{aligned}$$

dado que (f, g) es una descomposición básica para K . De la última desigualdad es inmediato que $F(p, q) \geq F(f, g)$.

Esto demuestra que (f, g) es un par minimal para la funcional F . Su unicidad, entre pares diferenciables, se sigue de (b) que ahora pasamos a probar.

(b) Tenemos

$$f(x) + g(y) \geq K(x, y)$$

$$f(x) + g(\varphi(x)) = K(x, \varphi(x)).$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$g(y) - g(\varphi(x)) \geq K(x, y) - K(x, \varphi(x)).$$

Sea x fijo y sea $y > \varphi(x)$. Entonces,

$$\frac{g(y) - g(\varphi(x))}{y - \varphi(x)} \geq \frac{K(x, y) - K(x, \varphi(x))}{y - \varphi(x)}$$

Tomando límite cuando y tiende a $\varphi(x)$, tenemos

$$\lim_{y \downarrow \varphi(x)} \frac{g(y) - g(\varphi(x))}{y - \varphi(x)} \geq K_y(x, \varphi(x)).$$

Similarmente, si $y < \varphi(x)$ entonces dividiendo por $y - \varphi(x)$ obtenemos la desigualdad invertida y en el límite tenemos

$$\lim_{y \uparrow \varphi(x)} \frac{g(y) - g(\varphi(x))}{y - \varphi(x)} \leq K_y(x, \varphi(x)).$$

Esto demuestra que si g es diferenciable en el punto $\varphi(x)$, debemos tener

$$g'(\varphi(x)) = K_y(x, \varphi(x)).$$

De donde,

$$g'(y) = K_y(\varphi^{-1}(y), y)$$

Un argumento similar demuestra que si f es diferenciable en el punto x ,

$$f'(x) = K_x(x, \varphi(x)).$$

Estas ecuaciones diferenciales determinan f y g hasta una constante.

Las constantes son encontradas usando la condición de normalización y la condición

$$f(x) + g(\varphi(x)) = K(x, \varphi(x)).$$

Así, si una descomposición básica de K existe, ella es única y puede ser encontrada usando las expresiones dadas para f' y g' . Si el par obtenido al resolver estas ecuaciones no es admisible entonces K no admite una descomposición básica a lo largo de $y = \ell(x)$.

Ejemplo 3. $K(x,y) = x^\alpha y^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Es bien sabido que

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x^{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y^{\alpha + \beta} \geq x^\alpha y^\beta.$$

Luego $(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x^{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta} y^{\alpha + \beta})$ es una descomposición básica para $K(x,y) = x^\alpha y^\beta$ a lo largo de $y = x$. Por lo tanto, usando teorema 3, $(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x^{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta} y^{\alpha + \beta})$ es el único par minimal (hasta una constante) del núcleo dado.

Ejemplo 4. $K(x,y) = -xy$ en $I \times I$, $I = [0,1]$. Este núcleo no admite una descomposición básica a lo largo de la diagonal $y = x$. Supongamos que admite una tal descomposición a lo largo de $y = 1 - x$. Entonces,

$$f^r(x) = K_x(x, 1 - x) = x - 1.$$

De donde, $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + c$. Dado que K es simétrico, tomamos $g = f$ y encontramos la constante c de la ecuación

$f(x) + g(1 - x) = K(x, 1 - x)$. Esto da $c = \frac{1}{4}$. Entonces,

$f(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{4}$. La admisibilidad del par (f,f) se sigue de

$$\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} y^2 - y + \frac{1}{4} + xy = \frac{1}{2} (x + y - 1)^2 \geq 0.$$

Luego, el núcleo $K(x,y) = -xy$ admite una descomposición básica a lo largo de la diagonal $y = 1 - x$ y su único punto fijo minimal diferenciable es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}$. El hecho que hayamos tenido éxito con la descomposición a lo largo de $y = 1 - x$ tiene su justificación en el Teorema 4.

Lema 1. Sea $[a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en una parte del plano xy en la cual K_{xy} es positivo. Entonces,

$$K(a,c) + K(b,d) > K(a,d) + K(b,c).$$

Esta desigualdad es invertida si K_{xy} es negativo.

Demostración: Basta integrar. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_a^b \int_c^d K_{xy} dy dx = \int_a^b (K_x(x,d) - K_x(x,c)) dx \\ &= K(b,d) - K(b,c) - K(a,d) + K(a,c). \end{aligned}$$

Teorema 4. Sea K un núcleo polinomial. Supongamos que K_{xy} no cambia de signo en el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$. Sea $y = \varphi(x)$ la ecuación de la diagonal cuya pendiente tiene el signo de K_{xy} . Entonces, K admite una descomposición básica a lo largo de $y = \varphi(x)$.

Demostración: Consideremos el par (f,g) obtenido de integrar las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} f'(x) &= K_x(x, \varphi(x)) \\ g'(y) &= K_y(\varphi^{-1}(y), y) \end{aligned} \tag{6}$$

escogiendo las constantes de integración tal que

$$f(x) + g(\varphi(x)) = K(x, \varphi(x)). \tag{7}$$

Si el par así obtenido es admisible entonces el teorema queda demostrado.

Observamos primeramente que debido a (6), las funciones $f(x) + g(\varphi(x))$ y $K(x, \varphi(x))$ tienen la misma derivada; luego, es posible que satisfagan (7).

Tenemos una identidad polinomial de la forma

$$K(x, y) - f(x) - g(y) = (y - \varphi(x))^2 \phi(x, y). \quad (8)$$

En efecto, sea x fijo y consideremos el primer miembro de (8) como un polinomio $P(y)$ en la variable de y . Usando (7) vemos que $\varphi(x)$ es un cero de este polinomio; así, $(y - \varphi(x))$ es un factor de $P(y)$. La derivada de $P(y)$ es $K_y(x, y) - g'(y)$. De (6) vemos que esta derivada también se anula cuando $y = \varphi(x)$. Por lo tanto, $\varphi(x)$ es una raíz doble de $P(y)$; de donde, se sigue la factorización dada en (8).

Ahora hacemos notar que

$$\phi(x, \varphi(x)) < 0 \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \quad (9)$$

Diferenciando (8) con respecto a x e y obtenemos

$K_{xy}(x, y) = -2\varphi'(x)\phi(x, y) + (y - \varphi(x))T(x, y)$ donde T es un polinomio en x e y . Haciendo $y = \varphi(x)$ resulta (9) pues por hipótesis K_{xy} y φ' tienen el mismo signo.

Estamos ahora en condiciones de probar que

$$\tilde{K}(x, y) = K(x, y) - f(x) - g(y) < 0 \quad (8)$$

para todos los puntos (x, y) del rectángulo excepto para los puntos sobre la diagonal $y = \varphi(x)$, en la cual se anula. Si (8) es falso, existe un punto P fuera de la diagonal en el cual $\phi(P) \geq 0$. Dado que la diagonal y el conjunto obtenido por intersección del rectángulo con el conjunto en el cual ϕ es no negativo son conjuntos compactos disjuntos,

podemos tomar P como el punto más cercano a la diagonal con la propiedad $\phi(P) \geq 0$. Sea Q el punto sobre la diagonal más cercano a P y sean R y S los otros dos vértices del rectángulo con diagonal PQ y de lados paralelos a los ejes coordenados. Como R y S están más cerca de la diagonal que P , $\phi(R)$ y $\phi(S)$ son negativos; luego, $\tilde{K}(R) + \tilde{K}(S) < 0$. Como $\tilde{K}(Q) = 0$ y $\tilde{K}(P) \geq 0$, tenemos

$$\tilde{K}(Q) + \tilde{K}(P) > \tilde{K}(R) + \tilde{K}(S).$$

Entonces, por lema 1, la pendiente de PQ debe tener el mismo signo de $\tilde{K}_{xy}$ ($\tilde{K}_{xy} = K_{xy}$). Luego, la pendiente de PQ y K_{xy} tienen el mismo signo. Como el signo de $\psi'(x)$ coincide con el signo de K_{xy} , se sigue que la pendiente de PQ y $\psi'(x)$ tienen el mismo signo, lo que es una contradicción pues PQ es perpendicular a $y = \psi(x)$. En consecuencia, $\tilde{K}(x,y) \leq 0$ para todo (x,y) en el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$. Con ello queda probado la admisibilidad del par (f,g) y, por lo tanto, K admite una descomposición básica a lo largo de $y = \psi(x)$.

Ejemplo 6. Cualquier núcleo de la forma $K(x,y) = -x^\alpha y^\beta$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, con x e y en el intervalo $[0,1]$, admite una descomposición básica a lo largo de $y = 1 - x$ y, en consecuencia, su par minimal puede ser encontrado resolviendo las ecuaciones diferenciales dadas en Teorema 3.

Teorema 5. Si los núcleos $K_1, K_2, \dots, K_n$ admiten descomposiciones básicas (f_i, g_i) a lo largo de la diagonal $y = \psi(x)$ entonces

$$f = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad y \quad g = \sum_{i=1}^n c_i g_i \quad \text{es una descomposición básica del núcleo}$$

$$K = \sum_{i=1}^n K_i \quad \text{para cualquier conjunto de constantes positivas } c_i.$$

Demostración: [3].

Ejemplo 7. $K(x,y) = \sum_{i=1}^n c_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$, $c_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $x \geq 0$,

$y \geq 0$. Usando el ejemplo 3 y Teorema 5, concluimos que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{c_i \alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} x^{\alpha_i + \beta_i}, \sum_{i=1}^n \frac{c_i \beta_i}{\alpha_i + \beta_i} y^{\alpha_i + \beta_i} \right)$$

es el único par minimal (hasta una constante) de $K(x,y)$. En particular, para $K(x,y) = 6x^3y^2 + x^2y^5$, la solución es

$$f(x) = \frac{18}{5} x^5 + \frac{2}{7} x^7 - \frac{41}{280},$$

$$g(y) = \frac{12}{5} y^5 + \frac{5}{7} y^7 + \frac{41}{280}$$

sobre cualquier intervalo de números reales no negativos. También puede usarse el Teorema 4.

Todos los ejemplos de núcleos hasta ahora considerados han tenido un único par minimal, el cual ha sido posible calcular encontrando la descomposición básica del núcleo a lo largo de una diagonal. Nuestro ejemplo siguiente es de un núcleo que admite descomposiciones básicas a lo largo de ambas diagonales, válidas en intervalos diferentes. Queremos ver que sucede en un intervalo en el cual ninguna de estas descomposiciones se ve rifique.

Ejemplo 8. $K(x,y) = (x - y)^3$, en el cuadrado $I \times I$, $I = [0,1]$.

La derivada K_{xy} es igual a $-6(x - y)$. Entonces, $K_{xy} < 0$ para $x > y$, $K_{xy} > 0$ para $x < y$. Por lo tanto, el núcleo puede admitir des composiciones básicas a lo largo de las diagonales indicadas en la figura anterior. Comenzamos buscando el par minimal en el cuadrado $[0, 1 - \alpha] \times [\alpha, 1]$. Tenemos

$$f'_1(x) = K_x(x, x + \alpha) = 3\alpha^2$$

$$g'_2(y) = K_y(y - \alpha, y) = -3\alpha^2.$$

Entonces,

$$f_1(x) = 3\alpha^2 x + c_1$$

$$g_2(y) = -3\alpha^2 y + c_2$$

Empleando la condición $f_1(x) + g_2(x + \alpha) = K(x, x + \alpha)$ encontramos que $c_1 + c_2 = 2\alpha^3$. Por lo tanto,

$$f_1(x) = 3\alpha^2 x + c_1, \quad 0 \leq x \leq 1 - \alpha$$

$$g_2(y) = -3\alpha^2 y + 2\alpha^3 - c_1, \quad \alpha \leq y \leq 1$$

En el cuadrado $[1 - \alpha, 1] \times [0, \alpha]$ corresponde una descomposición a lo largo de $y = 1 - x$, se obtiene

$$f_2(x) = \frac{1}{2} (2x - 1)^3 + c_3, \quad 1 - \alpha \leq x \leq 1$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2} (1 - 2y)^3 - c_3, \quad 0 \leq y \leq \alpha.$$

Imponiendo continuidad para f y g en $x = 1 - \alpha$ e $y = \alpha$ respectivamente, tenemos las ecuaciones

$$3\alpha^2(1 - \alpha) + c_1 = \frac{1}{2} (1 - 2\alpha)^3 + c_3$$

$$-3\alpha^3 + 2\alpha^3 - c_1 = \frac{1}{2} (1 - 2\alpha)^3 - c_3$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$\frac{1}{2} (1 - 2\alpha)^3 - 3\alpha^2 (1 - \alpha) = -\alpha^3 - \frac{1}{2} (1 - 2\alpha)^3$$

De donde, $(\alpha - 1)^2 (4\alpha - 1) = 0$. Es claro que $\alpha \neq 1$. Por lo tanto $\alpha = \frac{1}{4}$. Con este valor de α se obtiene la ecuación $c_3 = c_1 + \frac{5}{64}$.

La constante c_1 puede ser encontrada usando la condición de normalización, resultando ser $c_1 = -\frac{5}{64}$. Por lo tanto,

$$f_1(x) = \frac{3}{16} x - \frac{5}{64}, \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{4}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} (2x - 1)^3, \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2} (1 - 2y)^3, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}$$

$$g_2(y) = -\frac{3}{16}y + \frac{7}{64}, \quad \frac{1}{4} \leq y \leq 1$$

Comentamos que la admisibilidad del par (f_2, g_1) se sigue del Teorema 4. En cambio, la admisibilidad del par (f_1, g_2) debe ser verificada. De la demostración del Teorema 4 vemos que $K(x,y) - f_1(x) - g_2(y)$ es divisible por $(y - x - \frac{1}{4})^2$, resultando

$$K(x,y) - f_1(x) - g_2(y) = (y - x - \frac{1}{4})^2 (x - y - \frac{1}{2})$$

Pero, $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4} \leq y \leq 1$. De esto último se sigue $x - y - \frac{1}{2} \leq 0$. Queda así probada la admisibilidad de (f_1, g_2)

Uno fácilmente puede verificar que $f_1 \geq f_2$ en $[0, 3/4]$, $f_1 \leq f_2$ en $[3/4, 1]$, $g_1 \geq g_2$ en $[0, 1/4]$ y $g_1 \leq g_2$ en $[1/4, 1]$. Afirmamos que el par (f, g) , donde $f = f_1$ en $[0, 3/4]$, $f = f_2$ en $[3/4, 1]$, $g = g_1$ en $[0, 1/4]$ y $g = g_2$ en $[1/4, 1]$, es un par minimal para el núcleo dado en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. También afirmamos que este par (f, g) es el único par minimal seccionalmente diferenciable de $(x - y)^3$ en $[0, 1] \times [0, 1]$. Estas dos últimas afirmaciones son consecuencias de los siguientes teoremas.

Teorema 6. Sean $I = I_1 \cup I_2$ e $I = J_1 \cup J_2$, particiones del intervalo I . Supongamos que (f_1, g_1) es estacionario en $I_1 \times J_1$, (f_2, g_2) es estacionario en $I_2 \times J_2$, $f_1 \geq f_2$ en I_1 , $f_1 \leq f_2$ en I_2 , $g_1 \geq g_2$ en J_1 y $g_1 \leq g_2$ en J_2 . Entonces (f, g) , definido por $f = f_1$ en I_1 , $f = f_2$ en I_2 , $g = g_1$ en J_1 y $g = g_2$ en J_2 , es estacionario en $I \times I$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \sup_{y \in I} \{K(x,y) - g(y)\} &= \\
 &= \max\left\{ \sup_{y \in J_1} \{K(x,y) - g_1(y)\}, \sup_{y \in J_2} \{K(x,y) - g_2(y)\} \right\} \\
 &= \max\{f_1(x), f_2(x)\} = f(x).
 \end{aligned}$$

Similarmente, $(T_1 f)(y) = g(y)$ en I .

Teorema 7. Sea K un núcleo dado en el cuadrado $I \times I$, donde el intervalo I es particionado en $I = I_1 \cup I_2$ e $I = J_1 \cup J_2$. Sea (f_1, g_1) un par minimal para K en $I_1 \times J_1$ y (f_2, g_2) un par minimal para K en $I_2 \times J_2$. Si el par (f, g) definido por $f = f_1$ en I_1 , $f = f_2$ en I_2 , $g = g_1$ en J_1 , $g = g_2$ en J_2 , es admisible en $I \times I$ entonces es un par minimal para K en $I \times I$. Además, si (f_1, g_1) y (f_2, g_2) son únicos entonces (f, g) es único.

Demostración: Sea (p, q) cualquier par admisible en $I \times I$. Entonces, en particular, (p, q) es admisible en $I_1 \times J_1$, y en $I_2 \times J_2$. Así,

$$\begin{aligned}
 \int_{I_1} p + \int_{J_1} q &\geq \int_{I_1} f_1 + \int_{J_1} g_1 & y \\
 \int_{I_2} p + \int_{J_2} q &\geq \int_{I_2} f_2 + \int_{J_2} g_2
 \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades y usando las definiciones de f y g , obtenemos

$$\int_I p + \int_I q \geq \int_I f + \int_I g$$

Como, por hipótesis, (f,g) es admisible en $I \times I$ se sigue que (f,g) es un par minimal en $I \times I$. Ahora si (p,q) es minimal en $I \times I$, entonces debemos tener

$$\int_{I_1} p + \int_{J_1} q = \int_{I_1} f_1 + \int_{J_1} g_1 \quad y$$

$$\int_{I_2} p + \int_{J_2} q = \int_{I_2} f_2 + \int_{J_2} g_2$$

Esto es, (p,q) minimal en $I_1 \times J_1$ y en $I_2 \times J_2$. Por unicidad, $(p,q) = (f_1, g_1)$ en $I_1 \times J_1$ y $(p,q) = (f_2, g_2)$ en $I_2 \times J_2$. Esto prueba la unicidad de (f,g) .

OBSERVACION. Los resultados aquí presentados son consecuencia de un trabajo en conjunto realizado con el Profesor Dr. John D. Thomas de New Mexico State University, Estados Unidos.

REFERENCIAS.

- [1] R. Bellman, Approximation of functions, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 971.
- [2] R. Chattopadhyay, An algorithm for approximation of functions, J. Math. Anal. Appl. 41(1973), 132-136.
- [3] O. Rojo, On an Optimization Problem of Bellman, J. Math. Anal. Appl. 61(1977), 208-215.