REVISTA PROYECCIONES: 77-108.
JORNADAS MATEMATICAS, AGOSTO 1983.

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES SPLINE

Dr. FLORENCIO UTRERAS DIAZ*.

Uno de los problemas más antiguos a que se ha enfrentado la matemática aplicada es el de obtener una curva suave a partir del conocimiento de algunos de sus puntos.

Este problema tiene una gran diversidad de soluciones que dividiremos en dos categorías: Métodos de Aproximación y Métodos de Interpolación. Los primeros consisten en buscar una curva suave que se aproxime a los datos, pero que no necesariamente pase a través de ellos. Los segundos, de los cuales estudiaremos uno de los más importantes, buscan soluciones que pasen exactamente a través de los puntos conocidos.

Nos limitaremos en este curso a aquellas curvas que pueden ser definidas por una función f definida en un intervalo real que, sin pérdida de generalidad, supondremos $[0,1]$.

* Director Departamento Matemáticas y Ciencias de la Computación. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile.

En términos formales, el problema consiste en encontrar una función $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

en que los datos son los pares (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$ que se supone satisfacen

$$y_i = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

para alguna función desconocida f .

Es claro que el número de soluciones a este problema es infinito y que la elección de una de ellas dependerá de numerosos factores entre los que podemos mencionar: Propiedades de suavidad de f , número de datos, propiedades deseadas del interpolante, rapidez y simplicidad de los cálculos, etc.

La solución más antigua a este problema fue dada en el siglo XVII por Lagrange y Newton en forma separada. Esta consiste en construir un interpolante polinomial de grado $n-1$, solución de simplicidad atrayente que veremos presenta graves inconvenientes tanto desde un punto de vista teórico como práctico.

Más tarde se dieron numerosas soluciones, la mayoría consistente en construir una base de funciones analíticas dual a los funcionales de evaluación, por ejemplo, funciones trigonométricas, hiperbólicas, etc. Sin embargo, todas estas soluciones adolecen en general de dos problemas, el primero es lo complicado del cálculo de éstas y el segundo, las pocas propiedades teóricas de la solución.

En 1946, I.J. Shoenberg tuvo la idea de abandonar las funciones analíticas y considerar funciones seccionalmente polinomiales que

satisfacen propiedades de continuidad en los puntos x_i $i=1, \dots, n$. Esta sencilla idea llevó al desarrollo de una de las técnicas más usadas en análisis numérico, las funciones spline (o cercha). El propósito de este curso es estudiar algunas propiedades básicas de estas funciones e ilustrar su comportamiento en la práctica.

1.- INTERPOLACION POLINOMIAL.

Sea P_{n-1} el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a $n-1$. Este es un espacio vectorial de dimensión n .

Sean x_i $i = 1, \dots, n$ puntos distintos de $[0,1]$, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 1. Para cualquier $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ existe un único polinomio $p \in P_{n-1}$, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Demostración. La aplicación $L : P_{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$Lq = (q(x_1), q(x_2), \dots, q(x_n))$$

es lineal de un espacio de dimensión n en otro de igual dimensión, en consecuencia, para demostrar que el recorrido de L es $\mathbb{R}^n$ basta demostrar que su nulidad es 0, o sea, que su núcleo es $\{0\}$. En efecto,

$$Lq = 0 \iff q(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

se trata en consecuencia de un polinomio de grado $n-1$ que tiene n ceros distintos, esto implica $q = 0$.

Q.E.D.

Analicemos ahora el problema de la construcción del polinomio $p \in P_{n-1}$ que interpola los datos. Definamos para ello una base de P_{n-1} .

Definición. Los polinomios $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ definidos por

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Se denominan polinomios de Lagrange de grado $n-1$ asociados a $x_1, \dots, x_n$.

Es claro que $\ell_1, \dots, \ell_n$ son linealmente independientes y en consecuencia constituyen una base de P_{n-1} .

Consideremos ahora el polinomio

$$p(x) = \sum_{i=1}^n y_i \ell_i(x) \quad (5)$$

entonces:

Teorema 2. El polinomio p definido en (5) interpola los datos (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$.

Demostración.

Tenemos

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

o sea

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$$

entonces

$$p(x_j) = \sum_{i=1}^n y_i \delta_{ij} = y_j \quad j = 1, \dots, n$$

Q.E.D.

Este polinomio de interpolación así construido adolece de un defecto grave desde un punto de vista práctico, ya que para evaluar p en un punto x se necesita calcular $\ell_i(x) = i = 1, \dots, n$. Ahora bien, cada uno de estos cálculos requiere $(n-1)$ multiplicaciones y $n-1$ divisiones lo que da un total de $2(n-1)$ operaciones, sin contar las restas. Sin embargo si tuviéramos el polinomio en una base más conveniente, por ejemplo, si conociéramos $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tales que

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i \quad (6)$$

entonces $p(x)$ se puede calcular usando el algoritmo de Horner, o sea,

$$\begin{aligned} q_{n-1}(x) &= \alpha_{n-1} \\ q_{n-2}(x) &= \alpha_{n-2} + x q_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ q_i(x) &= \alpha_i + x q_{i+1}(x) \\ &\vdots \\ q_0(x) &= \alpha_0 + x q_1(x) \end{aligned} \quad (7)$$

y así

$$p(x) = q_0(x)$$

Vemos así que con esta expresión, $p(x)$ se puede calcular en $n-1$ multiplicaciones. Lo mismo ocurre si consideramos la siguiente ba-

se de P_{n-1} .

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = x - x_1$$

$$\vdots$$

$$N_i(x) = \prod_{j=1}^i (x - x_j) = (x - x_i) N_{i-1}(x) \quad i \leq n-1$$

El polinomio p de interpolación se puede escribir en esta base:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i N_i(x) \quad (9)$$

Definición. Los coeficientes β_i $i = 0, \dots, n-1$ se denominan diferencias divididas de f en los puntos $x_1, \dots, x_n$ y se denotan

$$\beta_i = \delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_{i+1}} f \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (10)$$

Teorema 3.

$$\delta_{x_1, \dots, x_i}(f) = \sum_{j=1}^i \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} \quad (11)$$

Demostración. Como el polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i N_i(x)$$

interpola f en los puntos $x_1, \dots, x_n$, o sea

$$p(x_i) = y_i = f(x_i)$$

$$y \quad N_j(x_k) = 0 \quad j \geq k$$

es claro

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i N_i(x) \quad (12)$$

interpola f en $x_1, \dots, x_k$ y debe coincidir con el polinomio

$$\sum_{j=1}^k f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (13)$$

por lo tanto, en particular deben coincidir los coeficientes de x^{k-1} que son

$$\beta_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{1}{(x_j - x_i)}$$

Q.E.D.

Este teorema permite definir las diferencias divididas en k puntos cualquiera y también demostrar el siguiente teorema que damos sin demostración.

Teorema 4.

$$\delta_{x_1, \dots, x_i}(f) = \frac{\delta_{x_2, \dots, x_i}(f) - \delta_{x_1, \dots, x_{i-1}}(f)}{x_i - x_1} \quad (14)$$

Demostración. Ejercicio

Consideremos ahora un ejemplo simple:

x_i	y_i			
1	1	7		
2	8	19	6	1
3	27	37	9	
4	64			

Diferencias Divididas para los
Datos de la izquierda de la Tabla.

El polinomio de Newton toma entonces la forma:

$$p(x) = 1 + 7(x-1) + 6(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3)$$

Vemos así que en realidad es bastante sencillo calcular los coe
ficientes del polinomio de Newton y que su evaluación no presenta en apa
riencia grandes dificultades ya que sólo requiere n multiplicaciones. Sin
embargo, esto no es tan claro, ya que si n es grande, lo que ocurre a me
nudo al tener muchos datos, el cálculo se hará un poco más caro y, lo
que es más grave, el tener que sumar n números de signo muchas veces al-
ternante lo que produce serios errores de redondeo en un computador.

A pesar de estas razones, el problema fundamental no está aquí
sino en el comportamiento de los polinomios para n grande, tenemos en
particular el siguiente teorema:

Teorema 4 (Runge) Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in [-5,5]$ y sea $\{p_n\}$ la suce-
sión de polinomios de interpolación de f en los puntos

$$x_1 = -5$$

$$x_k = -5 + (k-1)h \quad h = \frac{10}{n}$$

$$x_{n+1} = 5$$

Entonces $\{p_n\}$ diverge fuera del intervalo $[-3.63, 3.63]$.

Vemos así que aún una función analítica en un intervalo cerrado no posee suficientes propiedades para garantizar la convergencia de las aproximaciones polinomiales. Esto basta para no considerar a este tipo de interpolación como una alternativa válida, sin embargo el hecho que los polinomios posean primitivas y derivadas de fácil cálculo hace tentador el mantenerlos como una opción. Esto se puede lograr considerando funciones seccionalmente polinomiales que, permitiendo a las derivadas de orden superior algunas singularidades, sean más "flexibles" que los polinomios.

2.- FUNCIONES SPLINE CUBICAS.

Comencemos el estudio de las funciones spline con un ejemplo simple que constituye al mismo tiempo uno de los casos más usados. Sea $S(3, \bar{x})$ el conjunto de funciones:

$$S(3, \bar{x}) = \{s : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_3\} \cap C^2[0,1] \quad (15)$$

$$\text{con } x_1 = 0, \quad x_n = 1$$

Si $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ este espacio vectorial tiene $4(n-1)$ parámetros menos $3(n-2)$ restricciones lo que da para $S(3, \bar{x})$ una dimensión de

$$\dim (S(3, \bar{x})) = 4(n-1) - 3(n-2) = n + 2 \quad (16)$$

Consideremos ahora el problema de encontrar un elemento $s \in S(3, \bar{x})$ que interpole f en $x_1, \dots, x_n$.

Esto impone n condiciones independientes para los $n+2$ parámetros que se deben determinar. Quedan entonces dos preguntas, la primera es si, independientemente de $y_1, \dots, y_n$ existe $s \in S(3, \bar{x})$ tal que

$$s(x_i) = y_i \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

La segunda pregunta es si es único.

Para responder a estas preguntas observemos que $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ debe ser un polinomio de grado 3, si además $s(x_i) = y_i$; $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$ entonces para determinar dicho polinomio bastará conocer $\lambda_i = s'(x_i)$ $\lambda_{i+1} = s'(x_{i+1})$ cantidades que deben existir porque $s \in C^2[0,1]$. Esto nos dice que $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ tiene la expresión

$$s(x) = y_i + \lambda_i (x - x_i) + \frac{\Delta_i - \lambda_i}{h_i} (x - x_i)^2 + \frac{\lambda_{i+1} - 2\Delta_i + \lambda_i}{h_i^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) \quad (18)$$

en que

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i \\ \Delta_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (19)$$

Para que s , definida por (18) en cada intervalo, pertenezca a $S(3, \bar{x})$ es necesario y suficiente que sea posible determinar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$s \in C^2 [0,1] \quad (20)$$

Como s es polinomial en cada subintervalo y C^1 por definición (18), entonces una condición necesaria y suficiente para que s pertenezca a $C^2 [0,1]$

es que

$$s''(x_i^+) = s''(x_i^-) \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (21)$$

Derivando (18) dos veces obtenemos:

$$s''(x) = 2 \frac{\Delta_i - \lambda_i}{h_i} + 2 \frac{\lambda_{i+1} - 2\Delta_i + \lambda_i}{h_i} [2(x - x_i) + (x - x_{i+1})] \quad (22)$$

en (x_i, x_{i+1}) , así

$$\begin{aligned} s''(x_i^+) &= 2 \frac{\Delta_i - \lambda_i}{h_i} + 2 \frac{\lambda_{i+1} - 2\Delta_i + \lambda_i}{h_i^2} [x_i - x_{i+1}] \\ &= 2 \frac{\Delta_i - \lambda_i}{h_i} - 2 \frac{\lambda_{i+1} - 2\Delta_i + \lambda_i}{h_i} \\ &= 2 \frac{3\Delta_i - 2\lambda_i - \lambda_{i+1}}{h_i} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} s''(x_{i+1}^-) &= 2 \frac{\Delta_i - \lambda_i}{h_i} + 2 \frac{\lambda_{i+1} - 2\Delta_i + \lambda_i}{h_i^2} 2(x_{i+1} - x_i) \\ &= 2 \frac{-3\Delta_i + \lambda_i + 2\lambda_{i+1}}{h_i} \end{aligned} \quad (24)$$

de donde la ecuación (21) se escribe

$$2 \frac{3\Delta_i - 2\lambda_i - \lambda_{i+1}}{h_i} = 2 \frac{-3\Delta_{i+1} + \lambda_{i-1} + 2\lambda_i}{h_{i-1}}$$

$$\frac{1}{h_{i-1}} \lambda_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i + \frac{1}{h_i} \lambda_{i+1} = 3 \left(\frac{\Delta_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta_i}{h_i} \right)$$

$$i = 2, \dots, n-1 \quad (25)$$

Hemos así establecido un sistema lineal que deben satisfacer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; este sistema tiene $n-2$ ecuaciones por lo que para determinar completamente estos parámetros debemos imponer dos condiciones adicionales. Estas son de tres tipos y dependen de la información adicional que se posea sobre f

Tipo I : Hermite

$$\lambda_1 = f'(x_1) \quad \text{dadas} \quad (26)$$

$$\lambda_n = f'(x_n)$$

Tipo II : Naturales

$$s''(x_1^+) = s''(x_n^-) = 0$$

o sea

$$2 \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \Delta_1$$

$$\lambda_{n-1} + 2\lambda_n = 3 \Delta_{n-1} \quad (27)$$

Tipo III : Periódicas

$$s'(x_1) = s'(x_n)$$

$$s''(x_1) = s''(x_n)$$

O sea,

$$\lambda_1 = \lambda_n$$

$$\frac{3\Delta_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2}{h_1} = \frac{-3\Delta_{n-1} + \lambda_{n-1} + 2\lambda_n}{h_{n-1}} \quad (28)$$

Consideremos por ejemplo las de tipo II que no requieren información adicional sobre f , en este caso el sistema queda en la forma siguiente:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 3\Delta_1$$

$$\frac{1}{h_i} \lambda_i + 2 \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \lambda_{i+1} + \frac{1}{h_i} \lambda_{i+2} = 3 \left(\frac{\Delta_i}{h_i} + \frac{\Delta_{i+1}}{h_{i+1}} \right) \quad (29)$$

$$\lambda_{n-1} + 2\lambda_n = 3\Delta_{n-1}$$

Queda por ver si este sistema tiene o no solución. Simetrizemos para ello el sistema

$$2 \frac{1}{h_1} \lambda_1 + \frac{1}{h_1} \lambda_2 = 3 \frac{\Delta_1}{h_1}$$

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{h_1} \lambda_1 + 2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{2}{h_2} \right) \lambda_2 + \frac{1}{h_2} \lambda_3 & = & 3 \left(\frac{\Delta_1}{h_1} + \frac{\Delta_2}{h_2} \right) \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{1}{h_{n-2}} \lambda_{n-2} + 2 \left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}} \right) \lambda_{n-1} + \frac{1}{h_{n-1}} \lambda_n & = & 3 \left(\frac{\Delta_{n-2}}{h_{n-1}} + \frac{\Delta_{n-1}}{h_{n-1}} \right)
\end{array}$$

$$\frac{1}{h_{n-1}} \lambda_{n-1} + 2 \frac{1}{h_{n-1}} \lambda_n = 3 \frac{n-1}{h_{n-1}}$$

Llamemos M a la matriz asociada a este sistema que es claramente simétrica. Vamos a demostrar que es definida positiva, en efecto

$$\begin{aligned}
u^T M u &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} (u_i^2 + u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2) \frac{1}{h_i} \\
&\geq \frac{2}{h_{\max}} \sum_{i=1}^{n-1} (u_i^2 + u_i u_{i+1} + u_{i+1}^2) \\
&\geq \frac{2}{h_{\max}} u^T Q u
\end{aligned} \tag{30}$$

en que

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

es fácil ver que los valores propios de Q están en el intervalo $[1,6]$ y en consecuencia

$$u^T M u \geq \frac{2}{h_{\max}} u^T Q u \geq \frac{2}{h_{\max}} u^T u \geq 0$$

Más aún $u^T M u = 0 \iff u=0$, lo que demuestra que M es no singular y que el sistema lineal (29) tiene siempre una y sólo una solución. Siendo además un sistema tridiagonal simétrico, su solución es extremadamente rápida.

Por otra parte, una vez obtenidos los coeficientes, es extremadamente simple evaluar s por intermedio de las expresiones locales que son polinomios cúbicos en cada intervalo y requieren en consecuencia sólo 3 multiplicaciones (y no n como en el caso de los polinomios). Se mantiene también la propiedad de integración, que es extremadamente sencilla, así como la de derivación.

Ejemplo:

Consideremos los datos

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1	1.5	1.8	2.1	2.4	2.8

En este caso $h_i = h = 0.2 \quad i = 1, \dots, 5$

$$\Delta_1 = \frac{1.5-1}{0.2-0} = 2.5$$

$$\Delta_4 = \frac{0.3}{0.2} = 1.5$$

$$\Delta_2 = \frac{0.3}{0.2} = 1.5$$

$$\Delta_5 = \frac{0.4}{0.2} = 2$$

$$\Delta_3 = \frac{0.3}{0.2} = 1.5$$

el sistema queda entonces

$$2\lambda_1 + \lambda_2 = 7.5$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 12$$

$$\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 = 9$$

$$\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 = 9$$

$$\lambda_4 + 2\lambda_5 + \lambda_6 = 10.5$$

$$\lambda_5 + 2\lambda_6 = 6$$

Que se resuelve fácilmente dando

$$\lambda_1 = 2.770334928$$

$$\lambda_4 = 1.471291866$$

$$\lambda_2 = 1.959330144$$

$$\lambda_5 = 1.7224880038$$

$$\lambda_3 = 1.392344498$$

$$\lambda_6 = 2.138755981$$

Hemos resuelto en esta forma los problemas numéricos derivados del alto grado de los polinomios involucrados en la interpolación polinomial, manteniendo fijo el grado en cada intervalo. Veamos ahora si hemos resuelto los problemas derivados de la no-convergencia de la interpolación polinomial.

Demostremos primero ciertas propiedades de optimalidad.

Teorema 5. Sea $f \in H^2 [0,1] = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} / f, f', f'' \in L^2 [0,1]\}$ y s la función de interpolación definida anteriormente, entonces

$$\int_0^1 s''(x) (s''(x) - f''(x)) dx = 0 \quad (32)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 s''(x) (s''(x) - f''(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x) (s''(x) - f''(x)) dx \end{aligned}$$

integrando por partes:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n-1} s''(x) (s'(x) - f'(x)) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(x) (s'(x) - f'(x)) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[s''(x_{i+1}) (s'(x_{i+1}) - f'(x_{i+1})) - s''(x_i) (s'(x_i) - f'(x_i)) \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{n-1} (s(x) - f(x)) s'''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= s''(x_n) (s'(x_n) - f'(x_n)) - s''(x_1) (s'(x_1) - f'(x_1)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \left[(s(x_{i+1}) - f(x_{i+1})) s'''(x_{i+1}^-) - (s(x_i) - f(x_i)) s'''(x_i^+) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Interpretemos ahora en forma geométrica este resultado, para ello definamos el siguiente subespacio de $H^2 [0,1]$

$$I_f = \{u \in H^2 [0,1] / u(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (33)$$

Además, en $H^2 [0,1]$ la forma bilineal

$$(u,v) = \int_0^1 u''(x) v''(x) dx \quad (34)$$

representa un semi-producto escalar.

Ahora bien, como (32) es cierto para cualquier $u \in I_f$ (véase la demostración), se puede también escribir

$$(s, u-s) = 0 \quad \forall u \in I_f \quad (35)$$

Geométricamente esto quiere decir que $s \in I_f$ es ortogonal a todos los elementos que son de la forma $u-s$, o sea que son paralelos a I_f , es decir, s es "ortogonal" a I_f .

Figura 1

Esto nos permite en particular demostrar otra igualdad importante.

Teorema 6. Para cualquier $u \in I_f$ se tiene

$$\int_0^1 [s''(x)]^2 dx = \int_0^1 (u''(x))^2 dx - \int_0^1 (s''(x) - u''(x))^2 dx \quad (36)$$

Demostración. Es claro que por Pitágoras

$$(s, s) + (s - u, s - u) = (u, u)$$

lo que demuestra (36). Q.E.D.

Del Teorema 6 deducimos fácilmente que

Teorema 7. (Definición Variacional de s)
 s es el único elemento de I_f tal que

$$\int_0^1 (s''(x))^2 dx \leq \int_0^1 (u''(x))^2 dx \quad \forall u \in I_f \quad (37)$$

Demostración. De (36) es claro que s satisface (37), veamos si es único. En efecto si v satisficiera (37) entonces

$$\int_0^1 (s''(x))^2 dx = \int_0^1 (v''(x))^2 dx \implies \int_0^1 (u''(x) - s''(x))^2 dx = 0$$

de donde $u - s \in P_1$ es un polinomio de grado 1 que además cumple

$$u(x_i) - s(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

luego $u-s = 0$

Q.E.D.

Estudiemos ahora la convergencia cuando el número de puntos tiende a infinito y el tamaño del paso tiende a cero, más específicamente, definamos

$$h = \max_{i=1, n-1} |x_{i+1}^n - x_i^n| \quad (38)$$

para una sucesión de mallas

$$\bar{s}_n = \{x_1^n = 0 < x_2^n < \dots < x_n^n = 1\} \quad (39)$$

y estudiemos el comportamiento de la sucesión de funciones s_n tales que:

- i) s_n es una spline cúbica natural
- ii) $s_n(x_i^n) = f(x_i^n) \quad i = 1, 2, \dots, n$ (40)

La cota que daremos en este párrafo será una consecuencia de dos hechos fundamentales, el primero de ellos será el Teorema 6 que en particular nos señala que

$$|f - s_n|_2^2 = \int_0^1 (f''(x) - s_n''(x))^2 dx \leq \int_0^1 (f''(x))^2 dx = |f|_2^2 \quad (41)$$

El segundo hecho fundamental se deduce fácilmente del Teorema de Rolle y del hecho que s_n interpola f en los nodos de la malla. O sea,

$$(f - s_n)(x_i^n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y como $f - s_n \in C^1[0,1]$, por el teorema de Rolle o del Valor Medio deducimos la existencia de $\xi_i^n \quad i = 1, \dots, n-1$, tales que:

$$(f' - s'_n)(\xi_i^n) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \xi_i^n \in [x_j^n, x_{i+1}^n]$$

entonces

$$|\xi_{i+1}^n - \xi_i^n| \leq 2h \quad (42)$$

además en cada intervalo $[\xi_i^n, \xi_{i+1}^n]$ tenemos:

$$f'(u) - s'_n(u) = (f' - s'_n)(\xi_i^n) + \int_{\xi_i^n}^u (f'' - s''_n)(t) dt \quad (43)$$

o sea,

$$f'(u) - s'_n(u) = \int_{\xi_i^n}^u (f'' - s''_n)(t) dt$$

usando ahora la desigualdad de Schwartz tenemos:

$$\begin{aligned} |f'(u) - s'_n(u)| &\leq \left[\int_{\xi_i^n}^u dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\xi_i^n}^u (f'' - s''_n)^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ |f'(u) - s'_n(u)| &\leq |u - \xi_i^n|^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (f''(t) - s''_n(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2h)^{\frac{1}{2}} |f - s_n|_2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|f' - s'_n\|_{\infty} \leq h^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} |f - s_n|_2 \quad (44)$$

usando ahora (41) tenemos

$$\|f' - s'_n\|_{\infty} \leq h^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} |f|_2 \quad (45)$$

lo que nos da una primera cota de error para la convergencia de s'_n a f' .
Veamos ahora el caso de s_n . Por la condición de interpolación tenemos

$$(f' - s'_n)(x_i^n) = 0, \quad \text{o sea}$$

$$f(x) - s_n(x) = (f' - s'_n)(x_i^n) + \int_{\xi_i^n}^x (f' - s'_n)(t) dt$$

$$f(x) - s_n(x) = \int_{\xi_i^n}^x (f' - s'_n)(t) dt$$

de donde

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \int_{x_i^n}^x |f'(t) - s'_n(t)| dt$$

$$\leq \int_{x_i^n}^x \|f' - s'_n\|_{\infty} dt$$

$$\|f - s_n\|_{\infty} \leq h \|f' - s'_n\|_{\infty} \leq h^{3/2} \sqrt{2} |f|_2 \quad (46)$$

Hemos demostrado así la parte (ii) del teorema 8. La parte (i) es de demostración análoga y la dejamos al lector.

Teorema 8. La sucesión $\{s_n\}$ de funciones spline de interpolación a f en una sucesión de mallas $\bar{s}_n$ satisface

$$(i) \quad |f - s_n|_j \leq h^{2-j} |f|_2 \quad j = 0, 1, 2 \quad (47)$$

$$(ii) \quad \|f^{(j)} - s_n^{(j)}\|_{\infty} \leq h^{\frac{3}{2}-j} |f|_2 \quad j = 0, 1$$

Hemos así demostrado que este método de interpolación posee interesantes propiedades de convergencia, ya que aún con hipótesis bajas sobre f se logra no sólo la convergencia de f , sino de su primera derivada, en norma uniforme.

Con el objeto de mejorar aún más las cotas de error se debe recurrir a aumentar las hipótesis, pero al mismo tiempo agregar información en los bordes, así por ejemplo si utilizamos spline de tipo Hermite obtenemos las cotas:

$$|f - \sigma_n|_j \leq h^{4-j} |f|_4 \quad j = 0, 1, 2$$

$$\|f^{(j)} - s_n^{(j)}\|_\infty \leq h^{\frac{7}{2}} |f|_4 \quad j = 0, 1, 2$$

Para más detalles sobre éstas u otras propiedades teóricas, se recomienda al lector consultar la bibliografía.

3.- FUNCIONES SPLINE POLINOMIALES.

La teoría que hemos comenzado a estudiar en el párrafo anterior permite distintos tipos de generalizaciones. El primero de estos consiste en considerar funciones seccionalmente polinomiales de un grado arbitrario y cuya continuidad pueda ser diferente en los nodos de la malla. Sea para ello

$$\Delta = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\} \quad (48)$$

una malla arbitraria y $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ un vector de enteros tales que

$$0 \leq d_i \leq k - 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (49)$$

en que $k \geq 1$ es un entero arbitrario.

Definamos el siguiente espacio de Funciones Spline de grado k

$$S_k(\Delta; d) = \{\sigma: [x_1, x_n] \rightarrow \mathbb{R} / \sigma \text{ satisface } H1 - H2\} \quad (50)$$

$$H1) \quad \sigma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_k \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$H2) \quad \sigma^{(j)}(x_i^+) = \sigma^{(j)}(x_i^-) \quad j = 0, \dots, k-1-d_i; \quad i = 1, \dots, n-1$$

Es claro que $S_k(\Delta; d)$ es un espacio vectorial cuya dimensión es:

$$(n-1)(k+1) - \sum_{i=2}^{n-1} (k-d_i) = n+k-1 + \sum_{i=2}^{n-1} d_i \quad (51)$$

Tal como se aprecia de la fórmula (51), los parámetros d_i $i = 2, \dots, n-1$ llamados deficiencias, aumentan el número de grados de libertad del espacio, es así como no basta en este caso fijar $k-1$ condiciones de borde, sino se requerirá además de interpolar la función en los puntos x_i , aumentar la información hasta completar el número dado en (51). Una forma usual de hacer esto es requiriendo que la spline resultante interpole a $f^{(j)}(x_i)$ en x_i para $j = 0, \dots, d_i$; $i = 2, \dots, n-1$ si a esto le agregamos la interpolación de $k-1$ derivadas en los bordes tenemos unidad de la solución.

Un caso importante es aquel en que k es impar,

$$k = 2m - 1 \quad (52)$$

En este caso, tal como en el caso cúbico, podemos demostrar propiedades de optimalidad en espacios funcionales adecuados. Consideremos en particular el caso especial en que además de H1) H2) se satisface

$$H3) \quad \sigma^{(j)}(x_1^+) = 0 \quad j = m, \dots, 2m-2$$

$$\sigma^{(j)}(x_n^-) = 0 \quad j = m, \dots, 2m-2$$

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 9. Existe una única función que satisfice H1, H2, H3 y que interpola f en $x_2, \dots, x_{n-1}$ con deficiencia d_i , o sea,

$$\sigma^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, d_i \quad i = 2, \dots, n-1$$

y ésta es a su vez la única solución del problema

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ u \in W_q \end{array} \int_{x_1}^{x_n} [u^{(m)}(t)]^2 dt \quad (53)$$

en que

$$W_q = \{v \in H^m[x_1, x_n] / v^{(j)}(x_i) = q^{(j)}(x_i) \quad j=0, \dots, d_i; \quad i=2, \dots, n-1\} \quad (54)$$

Demostración. Véase la bibliografía.

4.- UNA FORMULACION GENERAL.

A partir del teorema 9 se puede extraer un cuadro más abstracto que permite englobar muchos tipos de funciones spline. Este planteamiento general se debe a Atteia y se puede sintetizar de la siguiente forma.

Observamos en el planteamiento del teorema anterior tres tipos de dato

- Un espacio de Hilbert ($H^m[x_1, x_n]$)
- Un Operador diferencial (D^m)
- Un conjunto de Funcionales de Interpolación

Además de los recorridos del operador y los funcionales. Esta estructura se puede entonces generalizar de la siguiente forma:

Sean X, Y, Z tres espacios de Hilbert y $T: X \rightarrow Y, A: X \rightarrow Z$ dos operadores lineales, epiyectivos y continuos.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow A & \\ & & Z \end{array} \quad (54)$$

En el caso de nuestro ejemplo, los espacios y los operadores se definen como sigue

$$\begin{aligned} X &= H^m [x_1, x_n] \\ Y &= L^2 [x_1, x_n] \\ Z &= R^P \quad P = \sum_{i=2}^{n-1} (d_i + 1) \\ T &= D^m \end{aligned} \quad (55)$$

$$A(u) = (u(x_2), u'(x_2), \dots, u^{(d_2)}(x_2), u(x_3), \dots, u^{(d_3)}(x_3), \dots) \in R^P$$

Dado $z \in Z$, un elemento $\sigma \in X$ se llamará spline de interpolación de z relativo al operador A , a la solución (si existe) del problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \|T(u)\|^2 \\ &u \in X \\ &A(u) = z \end{aligned} \quad (56)$$

$$\text{Sea } I_z = \{u \in X / A(u) = z\} \quad (57)$$

$$\Omega = T(I_z) \quad (58)$$

Es claro entonces que

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad \|T(u)\|^2 = \text{Min} \quad \|v\|^2 \\ u \in X \quad \quad \quad v \in \Omega \\ A(u) = z \end{array} \quad (59)$$

problema que tiene solución única $\hat{v} \in \Omega$ si Ω es convexo, cerrado. Ahora bien, como Iz es una variedad afín y T es lineal, es claro que Ω es convexo, queda ver si es cerrado para lo cual basta ver si

$$\Omega_0 = T(I_0)$$

es cerrado. Pero

$$\begin{aligned} T(I_0) &= T(N(A)) \\ &= T(N(A) + N(T)) \end{aligned}$$

que es cerrado si y sólo si $N(A) + N(T)$ es cerrado, hemos demostrado así que una condición suficiente para que exista $v \in \Omega$ es que

$$N(A) + N(T) \quad \text{sea cerrado} \quad (60)$$

Por otra parte, $\hat{v}$ es único, falta determinar la unicidad de σ , como $v \in \Omega$ entonces cualquier $u \in Iz$ tal que $T(u) = \hat{v}$ es solución del problema. Esto implica que si σ, u son soluciones diferentes del problema, se tendrá

$$T(u) = T(\sigma) \implies u - \sigma \in N(T)$$

como $A(u) = A(\sigma) \implies u - \sigma \in N(A)$

O sea que una condición suficiente para que se tenga unicidad es que

$$N(A) \cap N(T) = \{0\} \quad (61)$$

Hemos demostrado así el siguiente teorema.

Teorema 10. Una condición suficiente para que exista una única spline de interpolación de z relativo a A es que

$$i) \quad N(A) + N(T) \quad \text{cerrado}$$

$$ii) \quad N(A) \cap N(T) = \{0\}$$

Veamos algunos ejemplos interesantes:

4.1. Histosplines.

Consideremos el problema de encontrar una aproximación de una función densidad de probabilidad, o sea, tal que

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = P[x_i \leq \omega \leq x_{i+1}] \quad i = 0, \dots, n-1$$

en que ω es la variable aleatoria considerada.

En estos casos, es usual conocer las cantidades p_i , o al menos una buena aproximación de ellas calculada de un histograma del experimento

Figura 2

Deseamos entonces encontrar una función "suave" f tal que

$$L_i(f) = \int_{x_{i+1}}^{x_i} f(x) dx = p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (62)$$

Sean entonces

$$X = H^m [-1, 1]$$

$$Y = L^2 [-1, 1]$$

$$X = R^n$$

$$T(u) = D^m(u)$$

$$A(u) = (L_1(u), \dots, L_n(u))$$

(63)

Como $N(T) = P_{m-1}$, si $n > m$ se tiene que

$$N(T) \cap N(A) = \{0\} \quad (64)$$

Por otra parte $N(T)$ es de dimensión finita y $N(A)$ es de codimensión finita, entonces el Teorema de Dieudonné asegura que

$$N(T) + N(A) \text{ es cerrado}$$

Este tipo de funciones spline son de uso corriente en aproximación de densidades. El lector interesado deberá consultar la bibliografía.

4.2. Superficies.

Sean x_i $i = 1, \dots, n$; puntos distintos del plano R^2 contenidos en un dominio Ω abierto, acotado. Dados y_i $i = 1, \dots, n$; un problema usual es el de encontrar una superficie que pase por los puntos (x_i, y_i) $i = 1, \dots, n$.

Esto se puede colocar en el marco anterior en la forma siguiente

$$X = H^2(\Omega)$$

$$Y = [L^2(\Omega)]^{n^2}$$

$$Z = R^n \quad (65)$$

$$T(u) = (D_{ij}^2 u) \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$A(u) = (u(x_1), \dots, u(x_n))$$

En este caso es un poco más delicado demostrar la existencia y unicidad de soluciones, los interesados deben consultar los trabajos de

Atteia, Thomman, Duchon, Franke.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Ahlberg, Nilson & Walsh

"The Theory of Splines and their Applications". Academic Press, New York, (1967).

[2] Atteia, M.

"Theorie et Applications de Fonctions Spline en Analyse Numerique". These Grenoble, 1966.

[3] De Boor, C.

"A Practical Guide to Splines". Springer Verlag, Berlin, 1975.

[4] Duchon, J.

"Interpolation des Fonctions de Deux Variables par des Fonctions Spline du Type Plaque Mince". RAIRO Analyse Numerique, Vol. 10, N° 12, 1976.

[5] Franke, R.

"A Critical Comparison of Several Methods for Scattered Data Interpolation". to appear in Mathematics of Computation.

[6] Laurent, P.J.

"Approximation et Optimisation". Hermman, Paris, 1972.

[7] Schumaker, L.L.

"Spline Functions: Basic Theory". Academic Press, New York, 1981.

[8] Thommann, J.

"Determination et Construction de Fonctions Spline a Deux Variables Definies sur un Domaine Rectangulaire on Circulaire". These, Lille, 1970.

[9] Utreras, F.

"Análisis Numérico I". Apuntes del curso dictado en la Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile, 1983.

[10] Utreras, F.

"Smoothing Noisy Data with Spline Functions". Lecture Notes of a course given in Milano, Italy from 12 to 18 June 1983. To appear.