REVISTA PROYECCIONES N° 6: 67-102.
DICIEMBRE 1983.

OPERADORES MONÓTONOS[§]

JAIME FIGUEROA N.*

PREFACIO.

Con el objeto de mostrar la importancia de la Teoría de Operadores Monótonos, citaré los siguientes ejemplos:

I) Resolución de la ecuación: $\frac{du}{dt} + Au \ni 0$, $u(0) = u_0$

S A un operador maximal monótono en H, entonces

$\forall u_0 \in D(A)$ existe una única $u(t)$ función de $[0, +\infty[$ en H, tal que:

1) $u(t) \in D(A) \quad \forall t > 0$

2) $u(t)$ es lipschitziana sobre $[0, +\infty[$

§ Cursillo dictado en las 2° JORNADAS DE MATEMATICAS, UNIVERSIDAD DEL NORTE. Agosto 1983.

* Profesor Depto. Matemática y Ciencia de la Computación. Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

$$3) \quad \boxed{\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni 0}$$

$$4) \quad u(0) = u_0$$

Además u verifica otras propiedades.

II) Resolución de la ecuación: $\frac{du}{dt} + Au \ni f$, $u(0) = u_0$

Sea A un operador maximal monótono en H . Entonces

$\forall f \in L^1(0, T; H)$ y todo $u_0 \in \overline{D(A)}$ existe una única solución débil u de la ecuación

$$\frac{du}{dt} + Au \ni f$$

tal que $u(0) = u_0$

Caso particular: Si A es un operador maximal cíclicamente monótono, las soluciones débiles de la ecuación $\frac{du}{dt} + Au \ni f$ son en el hecho soluciones fuertes si $f \in L^2(0, T; H)$.

III) PVF elíptico no-lineal.

Sea V un subespacio lineal cerrado de $W^{m,p}(\Omega)$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset V \subset W^{m,p}(\Omega)$$

y sea V' su dual.

DEFINICION : Sea $f \in V'$. La función $u \in V$ se llama solución variacional de la ecuación $Au = f$ si
 $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$ en que $(\cdot, \cdot)$ denota la paridad entre V y V' ,

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha}(x, u, \dots, D^{\alpha} u) D^{\alpha} v \, dx$$

Si $A_{\alpha}(x, \xi)$ son funciones reales definidas sobre $\Omega \times \mathbb{R}^N$ tales que

(I) A_{α} medibles en x , continuas en ξ

(II) $\forall (\xi, \eta) = ((\xi_{\alpha}), (\eta_{\alpha})) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ y $\forall x \in \Omega$ p.p.

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (A_{\alpha}(x, \xi) - A_{\alpha}(x, \eta)) (\xi_{\alpha} - \eta_{\alpha}) \geq 0$$

entonces existe $\tilde{A} : V \longrightarrow V'$:

$$a(u, v) = (\tilde{A}u, v) \quad , \quad \forall u, v \in V$$

Resulta que $\tilde{A}$ es monótono y demicontinuo de V en V' (esto es, $x_n \longrightarrow x \implies \tilde{A} x_n \longrightarrow Ax$)

Además si

$$\lim_{\|u\|_{m,p} \rightarrow \infty} a(u, v) / \|u\|_{m,p} = \infty \quad \dots \quad (*)$$

$$\|u\|_{m,p} \longrightarrow \infty$$

entonces $\forall f \in V'$ el problema variacional tiene al menos una solución $u \in V$.

NOTAS:

1) $\tilde{A}$ es una extensión del operador

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, u, \dots, D^{\alpha} u)$$

2) La condición (*) es una condición más débil que la coercividad de $a(., .)$

INTRODUCCION.

La teoría de los operadores monotónomos comenzó a desarrollarse cuando E. Zarantonello introdujo la noción de operador monótono. Esta noción surgió inspirada en las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ monótonas crecientes, y ha sido de gran utilidad en el análisis no lineal.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente, entonces se cumple $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Esta definición en esta forma, no es posible generalizarla a otros espacios ya que involucra un orden en el espacio; pero como todos sabemos

$$f \text{ monótona creciente} \iff (f(x) - f(y))(x-y) \geq 0$$

Si H es un espacio de Hilbert, tenemos un producto interno en $H \times H$, que en el caso de $H = \mathbb{R}$ coincide con el producto ordinario. Ahora bien, si $f: H \rightarrow H$, decimos que f es monótona si se satisface

$$\langle f(x) - f(y), x-y \rangle \geq 0 ; \text{ si } H = \mathbb{R} \text{ coincide con (2) } \iff (1).$$

Si B es un espacio de Banach, y B^* su dual, y $f: B \rightarrow B^*$, decimos que f es monótona si $\langle f(x) - f(y), x-y \rangle \geq 0$.

Si $B = H$, $B^* = H$ y ambas definiciones coinciden.

Las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótonas crecientes tienen propiedades como:

- (a) Si f es diferenciable, $f' \geq 0$
- (b) Si $f = g'$ entonces $g'' = f' \geq 0$,

luego g es convexa.

Estas propiedades se mantienen para los operadores monótonos si se generalizan en forma adecuada los conceptos de derivadas, positividad, convexidad, como se verá en el transcurso del cursillo.

M. Angélica Astaburuaga

Notaciones:

- 1) B espacio de Banach real; B^* su espacio dual.
- 2) Para $y \in B^*$, $x \in B$: $y(x)$ se denotará (y, x) .
- 3) H espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot, \cdot)$.
- 4) $A: B \longrightarrow P(B^*)$ se llama operador multiforme;
 $A: D(A) \subset B \longrightarrow B^*$ se llama operador uniforme.
- 5) Para un operador multiforme el conjunto:
 $D(A) = \{x \in B \mid Ax \neq \emptyset\}$ se llamará dominio efectivo
 $G(A) = \{[x, y] \in B \times B^* \mid x \in D(A), y \in Ax\}$ el gráfico de A
- 6) Sean A, B dos operadores multiiformes.
 A se dirá extensión de B ($A \supset B$) si $G(A) \supset G(B)$.

I. OPERADORES MONOTONOS.

Definición (Operador Monótono de grado $n \in \mathbb{N}$)

Un operador multiforme $A: B \longrightarrow P(B^*)$ se dice monótono de grado $n \in \mathbb{N}$ si $\forall u_0, u_1, \dots, u_{n+1} = u_0 \in D(A)$ y $\forall u_i^* \in Au_i$, $i = 0, \dots, n+1$ se tiene:

$$\sum_{i=0}^n (u_i^*, u_i - u_{i+1}) \geq 0$$

Un operador monótono de grado 1 se llama monótono.

Un operador monótono de grado n , $\forall n \in \mathbb{N}$ se llama operador cíclicamente monótono.

Observación.

Para el caso particular de operadores uniformes, la definición se reduce a:

$$1) \quad A: D(A) \subset B \longrightarrow B^* \text{ es monótono } \iff (Au_0, u_0 - u_1) + (Au_1, u_1 - u_0) \geq 0 \iff (Au_0 - Au_1, u_0 - u_1) \geq 0; \forall u_0, u_1 \in D(A)$$

$$2) \quad A: D(A) \subset B \longrightarrow B^* \text{ es cíclicamente monótono si y solo si:}$$

$$\sum_{i=0}^n (Au_i, u_i - u_{i+1}) \geq 0; \forall n, \forall u_0, \dots, u_{n+1} = u_0 \in D(A)$$

Para el caso aun más particular de los operadores lineales:

$$A \text{ monótono } \iff (Ax, x) \geq 0, \forall x \in D(A) \iff A \text{ positivo.}$$

Desde este punto de vista, los operadores monótonos son una generalización de los operadores lineales positivos.

Definición. (Operador Maximal Monótono)

Un operador A uniforme o multiforme se dice maximal monótono (respect. maximal cíclicamente monótono) si y solo si no existe ninguna extensión multiforme estricta de A que sea monótono (respect. cíclicamente monótono).

Observación.

El lema de Zorn asegura que todo operador monótono o cíclicamente monótono posee una extensión maximal.

Ejemplo 1. (Un operador maximal monótono elemental)

$$I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Ix = x$$

Ejemplo 2. (Un operador monótono no maximal)

$$A : \mathbb{R}^- \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Ax = x$$

La identidad I es una extensión estricta de A y es monótona. También lo es el operador monótono,

$$B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Bx = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \\ 2x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Ejemplo 3. (Un operador monótono no maximal con extensión multiforme)

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad Ax = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El operador multiforme

$$B : \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{R}), \quad Bx = \begin{cases} \{x-1\} & \text{si } x < 0 \\ \{x+1\} & \text{si } x > 0 \\ [-1,1] & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es extensión estricta de A ya que $G(A) \subsetneq G(B)$. En efecto $[0,0] \in G(B) - G(A)$.

Además el operador B es monótono.

Ejemplo 4. (Un operador Diferencial Maximal Monótono)

$$H = L^2(0, 1)$$

$$A: D(A) \subset H \longrightarrow H; \quad A(u) = -u'' - (u')^3,$$

en que la derivación es en el sentido de distribuciones y $D(A)$ es la intersección de los espacios de Sobolev $H^2(0, 1)$ y $H_0^1(0, 1)$.

El operador uniforme A es monótono. En efecto, $\forall u, v \in D(A)$:

$$\begin{aligned} (A(u) - A(v), u-v) &= \int_0^1 (-u'' - (u')^3 + v'' + (v')^3)(u-v) \, dx \\ &= \int_0^1 [(-u'' + v'')(u-v) + (-(u')^3 + (v')^3)(u-v)] \, dx \end{aligned}$$

Como $u, v \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, mediante una fórmula de Green la integral se reduce a:

$$\int_0^1 [(u' - v')(u' - v') + (u'^3 - v'^3)(u' - v')] \, dx$$

La integral es no-negativa por ser la función $f(z) = z^3$ monótona.

Información.

Más adelante se prueba que el operador del ejemplo 4, además es maximal monótono.

Ejemplo 5. (Un operador, que no es diferencial ni integral, maximal cíclicamente monótono)

$$H = L^2(\mathbb{R}^3)$$

$A: D(A) \subset H \longrightarrow H$ definido de la manera siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0$$

$$A(u)(x) = -\frac{1}{2} \Delta u(x) - \frac{2u(x)}{|x|} + u(x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|} dy$$

El dominio del operador es $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$, el espacio de las funciones de H cuyas derivadas hasta el orden 2 están en H .

Información.

- 1) El operador se llama operador de Hartree y describe el átomo de Helio;
- 2) La parte integral no es un operador compacto,
- 3) Se demostrará más adelante que $A + 2I$ es un operador maximal cíclicamente monótono.

Propiedades.

- 1) Los operadores multiformes monótonos o cíclicamente monótonos forman un cono.
- 2) Si A es un operador multiforme monótono o cíclicamente monótono en entonces también lo es:
 - a) A^{-1} en el caso que A sea invertible;
 - b) $\bar{A}$, en que $\bar{A}$ es la cerradura de A con respecto a la topología de $B \times B^*$, es decir:

$$[\xi, \eta] \in G(\bar{A}) \iff \text{Existe } x_i \in D(A) \text{ y existe } y_i \in A(x_i) \text{ tal}$$

que $x_i \longrightarrow \xi, y_i \longrightarrow \eta$

Teorema. (Caracterización de la monotonía en espacios de Hilbert)

Sea H un espacio de Hilbert, $A: H \longrightarrow P(H)$

A monótono $\iff \forall \lambda > 0, \forall [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in G(A),$

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda (y_1 - y_2)\|$$

$\iff \forall \lambda > 0$, existe $(I + \lambda A)^{-1} = T$ y es una contracción, es decir,

$$\|T(z_1) - T(z_2)\| \leq \|z_1 - z_2\| \quad ; \quad \forall z_1, z_2 \in R(A)$$

Demostración.

Observe que

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|^2 &= \|x_1 - x_2\|^2 + 2\lambda (x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \\ &\quad + \lambda^2 \|y_1 - y_2\|^2 \end{aligned}$$

Si A es monótono y $\lambda > 0$ entonces $2\lambda (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ es no-negativo, de donde sigue la desigualdad.

Si se tiene la desigualdad $\forall \lambda > 0$, entonces:

$2 (x_1 - x_2, y_1 - y_2) + \lambda \|y_1 - y_2\|^2 \geq 0$, de donde haciendo $\lambda \longrightarrow 0$ se prueba que A es monótono.

A partir de la desigualdad se prueba que $(I + \lambda A)^{-1}$ existe y es una contracción. En efecto, sean

$$z_1 \in (I + \lambda A)(x_1) \quad , \quad z_2 \in (I + \lambda A)(x_2).$$

Por definición de combinación lineal de operadores, $Z_1 = x_1 + \lambda y_1$, $Z_2 = x_2 + \lambda y_2$ con $y_1, y_2 \in D(A)$. La desigualdad implica:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|Z_1 - Z_2\| \quad \dots (1)$$

De (1) si $Z_1 = Z_2$ entonces $x_1 = x_2$, esto es,

$(I + \lambda A)(x_1) = (I + \lambda A)(x_2) \neq \phi \Rightarrow x_1 = x_2$. Por lo tanto $(I + \lambda A)^{-1}$ existe y por (1) se trata de una contracción.

La recíproca es evidente.

NOTA.

En espacios de Hilbert, la monotonía de un operador multiforme $A: D(A) \subset H \rightarrow P(H)$ implica que dado $\lambda > 0$ y $Z \in R(A)$ existe una única solución para el problema

$$x + \lambda Ax = Z,$$

en particular si $0 \in R(A)$, $\forall \lambda > 0$ existe una única solución para el problema de autovalores.

$$-Ax = \lambda x$$

Lo anterior es consecuencia de que el operador $(I + \lambda A)^{-1}$ es uniforme.

Teorema de Browder. (Caracterización de los operadores monótonos que son Gateaux diferenciables).

Sea $A: D(A) \subset B \rightarrow B^*$ un operador que es diferenciable en el sentido de Gateaux, $D(A)$ convexo y denso. Entonces:

A es montónomo si y solo si A'_u es un operador positivo, $\forall u \in D(A)$

Demostración.

($\Rightarrow$) $\forall u, h \in D(A)$ convexo,

$$(A'_u h, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{A(u+th) - A(u)}{t}, h \right)$$

$$A \text{ monótono} \Rightarrow \left(\frac{A(u+th) - A(u)}{t}, h \right) \geq 0. \text{ Luego}$$

$(A'_u h, h) \geq 0, \forall h \in D(A)$. Por densidad A'_u es positivo.

($\Leftarrow$) Basta observar que, $\forall x, y \in D(A)$:

$$(A(x) - A(y), x - y) = (A'_u (x - y), x - y)$$

con $u = y + t(x - y)$, $0 < t < 1$. Como $u \in D(A)$, de la hipótesis A'_u positivo sigue la monotonía de A .

Teorema de Minty. (Caracterización de los operadores monótonos que poseen Gateaux - Potenciales)

Sea $A: D(A) \subset B \rightarrow B^*$, $D(A)$ convexo y $f: D(A) \rightarrow \mathbb{R}$ el G-Potencial de A , es decir $\forall f(u) = A(u), \forall u \in D(A)$ entonces,

A es monótono si y solo si f es convexo.

Demostración.

($\Leftarrow$) Si f es convexa entonces $\forall x, y \in D(A), \forall \alpha \in (0, 1)$:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

es decir,

$$\frac{f(y + \alpha(x - y)) - f(y)}{\alpha} \leq f(x) - f(y)$$

Haciendo $\alpha \rightarrow 0$ el primer miembro tiende a $(\nabla f(y), (x - y))$ que por hipótesis es igual a $(A(y), x - y)$.

Luego se establece:

$$(A(y), x - y) \leq f(x) - f(y)$$

e intercambiando los roles,

$$(A(x), y - x) \leq f(y) - f(x)$$

y sumando

$$(A(y) - A(x), x - y) \leq 0$$

($\Rightarrow$) Se procede por contradicción.

Para todo $\alpha \in [0, 1]$ se define:

$$p(\alpha) = f(y + \alpha(x - y)) - f(y) - \alpha(f(x) - f(y))$$

La función f es convexa si y solo si $p(\alpha) \leq 0, \forall \alpha \in [0, 1]$.

Si por el contrario existe $\bar{\alpha} \in [0, 1]$ tal que $p(\bar{\alpha}) > 0$ entonces existe $\xi \in (0, 1)$ tal $p'(\xi) = 0, p(\xi) > 0$, dado que $p(0) = p(1) = 0$ y p es derivable en $(0, 1)$.

Puesto que $\nabla f(u) = A(u), \forall u \in D(A)$,

$$p'(\alpha) = (\nabla f(y + \alpha(x - y)), x - y) - f(x) + f(y)$$

$$= (A(y + \alpha(x - y)), x - y) - f(x) - f(y)$$

luego

$$p'(\xi) - p'(\alpha) = \frac{1}{\xi - \alpha} (A(Z) - A(w), Z - w)$$

en que $Z = y + \xi(x - y), w = y + \alpha(x - y)$

Siendo A monótono, si $\xi - \alpha < 0$ entonces $p'(\alpha) > 0$, esto es, p es creciente en $[\xi, 1]$. Por lo tanto, $p(\xi) \leq p(1) = 0$, lo cual es una contradicción.

Aplicación 1.

Considere el operador del Ejemplo 4.

$$A(u) = -u'' - u^3$$

$$\text{en que } D(A) = H^2_0(0, 1) \subset H^1_0(0, 1) \subset H = L^2(0, 1)$$

La monotonía de A puede probarse también utilizando el Teorema de Browder. Bastaría ver que A'_x es positivo, $\forall x \in D(A)$. Pero ello implica tanto cálculo como demostrarlo directamente.

Aplicación 2.

Considere el operador de Hartree del Ejemplo 5.

Se prueba, pero no es inmediato, que el operador $A'_u + 2I$, $\forall u \in D(A)$ es positivo, donde A es el operador de Hartree. Ello demuestra, según el Teorema de Browder, que $A + 2I$ es monótono.

Teorema de Vainberg. (Caracterización de operadores G -diferenciables que son G -potenciales)

Sea $A: D(A) \subset B \longrightarrow B^*$ operador G -diferenciable, $D(A) \subset B$ subespacio vectorial denso.

Hipótesis (*): $\forall x, u_1, u_2 \in D(A), \forall h_1, h_2 \in B$ la aplicación $w : (r, s) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (A'_{x+ru_1+su_2} h_1, h_2)$ es continua.

Entonces,

A tiene un potencial $f \iff A'_x$ es simétrico, $\forall x \in D(A)$

Además, en este caso el potencial está dado explícitamente por:

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 (A(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0) dt$$

donde

$x_0 \in B, f_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$ son arbitrarios.

Observación.

Sea $L: D(L) \subset B \longrightarrow B^*$ un operador lineal con dominio denso en B .

Entonces:

L tiene un G-potencial $\iff L$ es simétrico $\iff L \subset L^*$

En este caso el G-potencial está dado por:

$$f(u) = \frac{1}{2} (Lu, u)$$

Demostración.

($\implies$) Se supone que $A: D(A) \subset B \longrightarrow B^*$ tiene un potencial f , esto es, existe $f: D(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = \nabla f(x), \forall x \in D(A)$.

Hay que demostrar que A'_x es simétrico, $\forall x \in D(A)$, es decir,

$$(A'_x h_1, h_2) = (A'_x h_2, h_1), \quad \forall x \in D(A), \quad \forall h_1, h_2 \in B.$$

El dominio $D(A)$ es un subespacio vectorial, luego se puede definir $\forall x \in D(A), \quad \forall h_1, h_2 \in D(A), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = f(x + ah_1) - f(x), \quad \psi(x) = f(x + bh_2) - f(x)$$

en que

$$\nabla \varphi(x) = A(x + ah_1) - A(x), \quad \nabla \psi(x) = A(x + bh_2) - A(x)$$

Por el Teorema del Valor Medio, existen $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ tales que

$$\varphi(x + bh_2) - \varphi(x) = (\nabla \varphi(x + \tau_1 bh_2), bh_2)$$

$$\psi(x + ah_1) - \psi(x) = (\nabla \psi(x + \tau_2 ah_1), ah_1)$$

a partir de lo cual establecer,

$$\varphi(x + bh_2) - \varphi(x) = b (A(x + \tau_1 bh_2 + ah_1) - A(x + \tau_1 bh_2), h_2)$$

$$\psi(x + ah_1) - \psi(x) = a (A(x + bh_2 + \tau_2 ah_1) - A(x + \tau_2 ah_1), h_1)$$

El operador A es G-diferenciable, por el Teorema del Valor Medio nuevamente, existen $\tau_3, \tau_4 \in [0, 1]$ tales que

$$\varphi(x + bh_2) - \varphi(x) = ab (A'_\xi h_1, h_2) \quad \text{con } \xi = x + \tau_1 bh_2 + \tau_3 ah_1$$

$$\psi(x + ah_1) - \psi(x) = ab (A'_\eta h_2, h_1) \quad \text{con } \eta = x + \tau_4 bh_2 + \tau_2 ah_1$$

De la igualdad

$$\varphi(x + bh_2) - \varphi(x) = \psi(x + ah_1) - \psi(x),$$

por la hipótesis (*) de continuidad y la densidad del dominio $D(A)$ se

puede establecer finalmente haciendo $\tau_3 \rightarrow 0$, $\tau_4 \rightarrow 0$:

$$(A'_x h_1, h_2) = (A'_x h_2, h_1) \quad ; \quad \forall x \in D(A), \forall h_1, h_2 \in B$$

($\Leftarrow$) Basta probar que la función f así definida verifica

$$\nabla f(x) = A(x) \quad , \quad \forall x \in D(A)$$

bajo la hipótesis A'_x simétrico, $\forall x \in D(A)$.

El dominio $D(A)$ es un subespacio vectorial, luego $\forall x, h \in D(A)$

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (A(x_0 + t(x-x_0) + th), h) dt + \int_0^1 M(t) dt$$

en que

$$\begin{aligned} M(t) &= (A(x_0 + t(x-x_0) + th), x-x_0) - (A(x_0 + t(x-x_0)), x-x_0) \\ &= \int_0^t w(s, t) ds \end{aligned}$$

donde

$$w(s, t) = \frac{d}{ds} [(A(x_0 + t(x-x_0) + sh), x-x_0)]$$

$$= (A'_\xi h_1, x-x_0) \quad \text{con } \xi = x_0 + t(x-x_0) + sh$$

$$= (A'_\xi (x-x_0), h) \quad \text{por la hipótesis de simetría de } A'_x,$$

$$\forall x \in D(A)$$

$$= \frac{d}{dt} [(A(x_0 + t(x-x_0) + sh), h)]$$

es una función continua, por hipótesis (*), lo cual permite cambiar el orden de integración en la integral:

$$I = \int_0^1 M(t) dt = \int_0^1 \int_0^t w(s,t) dt$$

cuyo dominio de integración es

Intercambiando el orden de integración,

$$I = \int_0^1 \int_s^1 w(s,t) dt ds$$

Utilizando una fórmula establecida para $w(s,t)$ se obtiene:

$$I = \int_0^1 (A(x + sh, h) - A(x_0 + s(x - x_0) + sh), h) ds$$

Por lo tanto,

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 (A(x + sh), h) ds$$

La función $g(s) = (A(x + sh), h)$ es continua, por el Teorema del Valor Medio para integrales, existe $\eta \in [0,1]$ tal que

$$f(x + h) - f(x) = (A(x + \eta h), h)$$

que permite establecer, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t} [f(x + th) - f(x)] = (A(x + \eta th), h)$$

donde,

$$(\nabla f(x), h) = (A(x), h), \quad \forall h \in D(A)$$

La densidad del dominio $D(A)$, implica finalmente:

$$\nabla f(x) = A(x), \quad \forall x \in D(A)$$

Aplicación 1. (Cálculo del G-potencial de un operador utilizando el Teorema de Vainberg)

Consideremos el operador monótono del Ejemplo 4:

$$H = L^2(0,1), \quad D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

$$A = D(A) \subset H \longrightarrow H; \quad A(u) = -u'' - u'^3$$

Es fácil verificar que A es G-diferenciable y que

$$A'_u h = -h'' - 3(u'^2 h')$$

Utilizando una fórmula de Green:

$$(A'_u h, g) = \int_0^1 (h'g' + 3u'^2 h'g') dx$$

lo cual demuestra que A'_u es simétrico. Por otro lado,

$$(A'_{x+ru_1+su_2} h_1, h_2) = \int_0^1 f(r, s) dx$$

en que f es continua, lo cual prueba la hipótesis (*)

Eligiendo $f_0 = 0$, $x_0 = 0$ en la fórmula de Vainberg, el G-potencial de A es:

$$f(u) = \int_0^1 (A(tu), u) dt \quad , \quad \text{en que}$$

$$\begin{aligned} A(tu), u &= \int_0^1 A(tu)(s) u(s) ds \\ &= \int_0^1 [-tu''(s) u(s) - (tu'(s))^3 u(s)] ds \end{aligned}$$

Utilizando una fórmula de Green se deduce:

$$(A(tu), u) = t \int_0^1 [u'(s)]^2 ds + t^3 \int_0^1 [u'(s)]^4 ds$$

de donde se obtiene,

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [u'(s)]^2 ds + \frac{1}{4} \int_0^1 [u'(s)]^4 ds$$

Aplicación 2. (Cálculo del G-potencial del Operador Hartree)

Consideremos el operador de Ejemplo 5.

Eligiendo $f_0 = 0$, $x_0 = 0$ en la fórmula de Vainberg, un cálculo simple permite establecer que el G-potencial del Operador de Hartree es:

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x)}{|x|} dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(x) u^2(y)}{|x-y|} dx dy$$

II. OPERADORES CICLICAMENTE MONOTONOS.

La definición de operador cíclicamente monótono fue introducida en la parte I. Es un operador que es monótono para todo grado.

Un ejemplo de este tipo de operador lo constituye el operador diferencial $A(u) = -u'' - (u')^3$.

Ahora se verán relaciones de los operadores cíclicamente monótonos y subdiferenciales de funciones convexas.

El resultado básico es el siguiente:

Lema.

El operador multiforme $A: B \longrightarrow P(B^*)$ es cíclicamente monótono si y solo si existe $\varphi: B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, propia, s.c.i. tal que $A \subset \partial \varphi$.

Información.

A fines de la década de 1960, Rockafellar prueba que los operadores maximal cíclicamente monótonos son subdiferenciales de funciones convexas.

Dem.

($\Leftarrow$) Basta probar que $\partial \varphi$ es cíclicamente monótono.

$$\forall u_0, u_1, \dots, u_{n+1} = u_0 \in D(\partial \varphi) \text{ y } \forall u_i^* \in \partial \varphi(u_i)$$

se tiene por definición de subdiferencial

$$\varphi(y) - \varphi(u_i) \geq (u_i^*, y - u_i) ; \quad \forall y \in D(\varphi)$$

Haciendo $y = u_{i+1}$ y sumando se obtiene

$$\sum_{i=0}^n [\varphi(u_{i+1}) - \varphi(u_i)] \geq \sum_{i=0}^n (u_i^*, u_{i+1} - u_i)$$

esto es :

$$\sum_{i=0}^n (u_i^*, u_i - u_{i+1}) \geq 0$$

($\Rightarrow$) Se definirá la función φ explícitamente. Se toma

$$[x_0, x_0^*] \in G(A) \text{ fijo.}$$

Para $x \in B$:

$$\varphi(x) = \sup_{\substack{[x_i, x_i^*] \in G(A) \\ i=0, \dots, n}} \{ (x_n^*, x - x_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^*, x_{i+1} - x_i) \}$$

Resulta:

$$* \quad \varphi \text{ propia ya que } \varphi(x_0) = 0;$$

$$* \quad \varphi(x) > -\infty ;$$

$$* \quad \varphi \text{ convexa y s.c.i. por ser envolvente superior de funciones afines continuas;}$$

* $A \subset \partial \varphi$. Sea $x^* \in A(x)$. Hay que probar que $x^* \in \partial \varphi(x)$, es
to es:

$$\varphi(z) - \varphi(x) \geq (x^*, z - x), \quad \forall z \in D(\varphi)$$

Para ello basta probar que $\forall \varepsilon > 0$ existen $|y_0, y_1^*|, \dots, [y_m, y_m^*] \in G(A)$ tal que

$$(y_m^*, z - y_m) + (y_{m-1}^*, y_m - y_{m-1}) + \dots + (y_0^*, y_1 - y_0) \geq$$

$$\varphi(x) + (x^*, z - x) - \varepsilon$$

Esto se establece si el lado izquierdo es mayor o igual a:

$$(x_n^*, x - x_n) + (x_{n-1}^*, x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_0^*, x_1 - x_0) + (x^*, z - x) - \varepsilon$$

para toda elección de $[x_0, x_0^*], \dots, [x_n, x_n^*] \in G(A)$.

Para ello basta hacer $m = n + 1$, $y_j = x_j$, $y_j^* = x_j^*$,
 $j = 0, 1, \dots, n$, $y_{n+1} = y_m = x$, $y_{n+1}^* = y_m^* = x^*$.

TEOREMA. (Para espacios Banach reflexivos)

Sea $A: D(A) \subset B \rightrightarrows B^*$ Gateaux Diferenciable, $D(A)$ lineal y denso, tal que $\forall x, u_1, u_2 \in D(A)$, $\forall h_1, h_2 \in B$:

$$w: (r, s) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (A'_{x+ru_1+su_2} h_1, h_2) \text{ es continua.}$$

Entonces,

A cíclicamente monótono $\iff A'_x$ es positivo y simétrico, $\forall x \in D(A)$.

Demostración.

($\implies$) Por el resultado básico probado anteriormente, A cíclicamente

monótono implica la existencia de una función $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, propia, s.c.i. tal que $A \subset \partial\varphi$.

Es fácil establecer que $\{A(x)\} = \partial\varphi(x)$, $\forall x \in D(A)$. En efecto, sea $y^* \in \partial\varphi(x)$. Puesto que $\partial\varphi$ es monótono, $D(A)$ un subespacio vectorial y $A \subset \partial\varphi$ entonces,

$$(A(x + th) - y^*, x + th - x) \geq 0, \quad \forall x, h \in D(A), \quad \forall t > 0$$

Por la continuidad de A G -diferenciable,

$$(A(x) - y^*, h) \geq 0$$

$D(A)$ subespacio vectorial $\implies (A(x) - y^*, h) = 0, \forall h \in D(A)$

$D(A)$ denso $\implies A(x) = y^*$

Entonces, $\{A(x)\} = \partial\varphi(x)$, $\forall x \in D(A)$, B reflexivo y $D(A)$ subespacio vectorial. Por un resultado de Rockafellar, $\partial\varphi/D(A)$ es Gateaux-diferenciable y $\{A(x)\} = \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}$, $\forall x \in D(A)$. Por lo tanto, $\varphi/D(A)$ es el potencial de A .

La hipótesis (*) del Teorema de Vainberg se verifica, luego A'_x es simétrico, $\forall x \in D(A)$.

La positividad de A'_x , $\forall x \in D(A)$ sigue, por el Teorema de Browder, de la monotonía de A .

($\Leftarrow$) Por el Teorema de Browder, A'_x positivo, $\forall x \in D(A)$ implica que A es operador monótono.

Por el Teorema de Vainberg, A'_x simétrico, $\forall x \in D(A)$ implica que A tiene un potencial φ . Por el Teorema de Minty, A monótono implica φ convexa.

Se tiene φ convexa, propia, de dominio $D(A)$ lineal y denso tal que $\varphi/D(A)$ es G-diferenciable, entonces

$$\partial \varphi(x) = \{\nabla \varphi(x)\}, \quad \forall x \in D(\varphi)$$

Luego, $\partial \varphi(x) = \{A(x)\}$, $\forall x \in D(A)$, esto es $A \in \partial \varphi$. Por el lema básico demostrado anteriormente, A es cíclicamente monótono.

Corolario.

Sea $L: D(L) \subset B \longrightarrow B^*$ un operador lineal con dominio denso. Entonces,

L es cíclicamente monótono $\iff L$ es positivo y simétrico.

Aplicación 1.

El operador del ejemplo 4:

$$A(u) = -u'' - u'^3$$

en que $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ es G-diferenciable y monótono. Luego A'_u es positivo, $\forall u \in D(A)$, en que

$$A'_u h = -h'' - 3(u'^2 h')', \quad h \in H = L^2(0,1)$$

Para el cálculo del G-potencial utilizando el Teorema de Vainberg se demostró que además A'_u es simétrico, $\forall u \in D(A)$.

Por el Teorema recién demostrado,

A'_u positivo y simétrico $\forall u \in D(A)$ implica que A es cíclicamente monótono.

Aplicación 2.

Por razones análogas el operador $A + 2I$ resulta ser cíclicamente monótono, en que A es el operador de Hartree del Ejemplo 5.

III. OPERADORES MAXIMALES.

La definición de operadores maximal monótono y maximal cíclica mente monótono fue dada en la parte I.

Un ejemplo de este tipo de operador es $A + 2I$ en que A es el operador de Hartree introducido en el Ejemplo 5 de la parte I.

A continuación, se verán los resultados de G.J. Minty y de R. T. Rockafellar que caracterizan la monotonicidad maximal y la monotonicidad cíclica maximal respectivamente.

Teorema de Minty (1965)

Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \longrightarrow P(H)$ un operador multiforme definido sobre todo H .

Son equivalentes las siguientes proposiciones:

- 1) A es maximal monótono;
- 2) A es monótono y $R(A + I) = H$;
- 3) A es monótono y $R(A + \lambda I) = H$, $\forall \lambda > 0$;
- 4) A es monótono y $\exists \lambda > 0$ tal que $R(A + \lambda I) = H$;
- 5) $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ es una contracción y $D(I + \lambda A)^{-1} = H$;

Información.

En 1970 Rockafellar dio una generalización del Teorema de Minty a espacios de Banach reflexivos. Para ello es necesario una generalización no lineal de la identidad.

Demostración.

Se prueba (1) $\iff$ (2). El resto de las proposiciones son consecuencia inmediata del Teorema de caracterización de operadores monótonos en espacios de Hilbert.

(1) $\implies$ (2). Se usa fundamentalmente un resultado de H. Debrunner y P. Flor aparecido en Archive Mat. v.15 (1964), pp. 445-447 con el título "Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen" y que fuera generalizado a espacios infinito-dimensionales por el propio Minty en el artículo "On the generalization of a direct method of the calculus of variations" publicado en Bull. Amer. Math. Soc. 73(1967), 315-321. Otra versión se encuentra en el libro de V. Barbu. El resultado es el siguiente:

|| Sea $A: H \longrightarrow P(H)$ un operador monótono, F un conjunto cerrado y convexo, $F \subset D(A)$. Entonces $\forall y \in H, \exists x \in F$ tal que $(\eta + x - y, \xi - x) \geq 0, \forall [\xi, \eta] \in G(A)$.

Se supone A maximal monótono. Hay que probar que $R(A + I) = H$

Sea $y \in H$. Tomando $F = H$ en el resultado citado, se concluye que existe $x \in H$ tal que:

$$(\eta - (y - x), \xi - x) \geq 0, \quad \forall [\xi, \eta] \in G(A) \dots\dots (*)$$

Por hipótesis no existe extensión monótona de A , entonces nece

sariamente de (*) se tiene: $[x, y - x] \in G(A)$. Lo que implica $y \in (A + I)(x)$, esto es, $y \in R(A + I)$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sea $\hat{A}$ una extensión monótona de A : $A \subset \hat{A}$. Hay que probar que $\hat{A} \subset A$.

Sean $x, y \in H$ tales que $y \in \hat{A}(x)$. Puesto que $H = R(A + I)$ entonces $x + y \in H = R(A + I) \Rightarrow \exists z \in H$ tal que $x + y \in (A + I)(z)$ esto es $x + y - z \in A(z) \subset \hat{A}(z)$.

Por lo tanto $[z, x + y - z] \in G(\hat{A})$, $[x, y] \in G(\hat{A})$. De la caracterización de la monotonía en espacios de Hilbert,

$\forall \lambda > 0 : \|z - x\| \leq \|z - x + \lambda(x + y - z)\|$. Haciendo $\lambda = 1$ se tiene $x = z$, de donde $x + y \in (A + I)$ esto es $y \in A(x)$.

Teorema de Rockafellar (1966 - 1970).

Sea $A: B \longrightarrow P(B^*)$. Entonces: A es maximal cíclicamente monótono $\iff$ Existe $\varphi: B \longrightarrow (-\infty, +\infty]$,

semicontinua inferior, convexa y propia tal que $A = \partial \varphi$

Además φ es única salvo por una constante aditiva.

Demostración.

La demostración de este resultado es objeto del artículo de R.T. Rockafellar, "On the Maximal Monotonicity of Subdifferential Mappings" publicado en Pacific Journal of Mathematics, Vol. 33, N° 1, 1970.

Aplicación.

Sea $A: H \longrightarrow P(H)$ un operador maximal cíclicamente monótono.
 Por el Teorema de Rockafellar existe $\varphi: H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ el potencial s.c.i., convexo, propio, tal que $A = \partial \varphi$

Dado $v \in H$, el problema de encontrar $\lambda < 0$ y $u \in H$ tal que $\lambda(u - v) \in A(u)$ equivale a un problema de minimización.

Teorema (Principio de Lagrange)

Dado $v \in H$:

Existe $\lambda < 0$, $u \in H$ tal que $\lambda(u - v) \in A(u)$ si y solo si

$$\psi(u) = \inf_{x \in D(\varphi)} \psi(x) \quad \text{en que}$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{\lambda}{2} \|x - v\|^2, \quad \forall x \in D(\varphi)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $\lambda(u - v) \in A(u) = \partial \varphi(u)$ entonces, por definición:

$$\varphi(x) - \varphi(u) \geq (\lambda(u - v), x - u), \quad \forall x \in D(\varphi)$$

Por otro lado, haciendo $a = u - v$, $b = x - u$ en la identidad

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2 \quad \text{se establece:}$$

$$2(u - v, x - u) = \|x - v\|^2 - \|u - v\|^2 - \|x - u\|^2$$

Luego, $\forall x \in D(\varphi)$

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi(u) &= \varphi(x) - \varphi(u) + \frac{\lambda}{2} \left[\|u - v\|^2 - \|x - v\|^2 \right] \\ &\geq -\frac{\lambda}{2} \|x - u\|^2\end{aligned}$$

cantidad que es no negativa ya que $\lambda < 0$.

($\Leftarrow$) $\psi(u) \leq \psi(x)$, $\forall x \in D(\varphi)$ implica

$$\varphi(x) - \varphi(u) \geq \frac{\lambda}{2} \left[\|x - v\|^2 - \|u - v\|^2 \right]$$

Por la identidad establecida anteriormente, se obtiene:

$$\varphi(x) - \varphi(u) \geq \frac{\lambda}{2} \left[2(u - v, x - u) + \|x - u\|^2 \right] \quad \dots (*)$$

Puesto que φ es convexa, su dominio lo es también. Tomando $x = (1 - t)u + ty$ con $t \in (0, 1)$ se tiene

$$x - u = t(y - u), \quad \varphi(x) - \varphi(u) \leq t(\varphi(y) - \varphi(u))$$

Reemplazando en (*)

$$\varphi(y) - \varphi(u) \geq \lambda(u - v, y - u) + \frac{\lambda t}{2} \|y - u\|^2, \quad \forall t \in (0, 1)$$

de donde se concluye $\varphi(y) - \varphi(u) \geq (\lambda(u - v), y - u)$, esto es:

$$\lambda(u - v) \in \partial \varphi(u) = A(u)$$

ANEXO.

Resultados y definiciones previas.

(1) $A: B \longrightarrow P(B^*)$ es invertible $\iff$

$$Ax_1 \cap Ax_2 \neq \emptyset \implies x_1 = x_2$$

$$D(A) = R(A^{-1}), \quad D(A^{-1}) = R(A), \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$A \text{ uniforme: } A \circ A^{-1} = I/R(A), \quad A^{-1} \circ A \supset I/D(A)$$

$$A \text{ multiforme: } A \circ A^{-1} \supset I/R(A), \quad A^{-1} \circ A = I/D(A)$$

(2) Un operador uniforme $A: D(A) \subset B \longrightarrow B^*$ se dice

a) hemi-continuo si

i) $D(A)$ es un conjunto convexo;

ii) $\forall x, h \in D(A), \forall u \in B^*:$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (A((1-t)x + th) - A(x), u) = 0$$

(Ver Brézin, pp. 26)

b) demi-continuo si

$x_n, x \in D(A), x_n \longrightarrow x \implies Ax_n \longrightarrow Ax$, esto es, Ax_n converge

debilmente a Ax en B^* .

c) demi-cerrado si

$$x_n \in D(A), y \in B^*, x_n \longrightarrow x, Ax_n \longrightarrow y \text{ entonces}$$

$$x \in D(A) \text{ además } Ax = y$$

NOTA : La continuidad es una noción más fuerte que la demi-continuidad, pero la cerradura es más débil que la de demi-cerrado.

(3) Sea $L: D(L) \subset B \longrightarrow B^*$ un operador lineal.

L es maximal monótono si y solo si L es positivo, $D(L)$ es denso y no existe ninguna extensión uniforme lineal positiva.

(4) Una función $f: B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice convexa, propia, si $f \not\equiv +\infty$ y f es convexa; i.e. $D(f)$ convexo y

$$f(tu + (1-t)v) \leq t f(u) + (1-t) f(v) \quad ; \quad \forall u, v \in D(f), \forall t \in [0,1]$$

en que $D(f) = \{x \in B \mid f(x) \neq \infty\}$ es el dominio efectivo.

La función se dirá s.c.i. (semicontinua inferiormente) si $\forall x_0 \in B$:

$$\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Son propiedades equivalentes a la semi continuidad:

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \{x \in B : f(x) \leq \lambda\}$ es cerrado

(ii) epígrafo de $f = \{(x, \lambda) \in B \times \mathbb{R}, \lambda \geq f(x)\}$ es cerrado

- (5) El subdiferencial de una función convexa propia

$f : B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el operador multiforme

$\partial f : B \longrightarrow P(B^*)$ definido por:

$$x^* \in \partial f(x) \iff f(y) - f(x) \geq (x^*, y - x), \quad \forall y \in D(f)$$

x^* es llamado el subgradiente en x .

- (6) Sobre propiedades de la norma en espacios de Hilbert:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

$$2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

- (7) La función conjugada de $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia es la función

$\varphi^* : B^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:

$$\varphi^*(x^*) = \sup_{x \in B} \{(x^*, x) - \varphi(x)\}, \quad x^* \in B^*$$

Si φ es convexa, s.c.i. también lo es φ^* .

- (8) Propiedades:

$$1) (\partial \varphi)^{-1} \subset \partial \varphi^*$$

- 2) Si $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es convexa, propia, $D(\varphi)$ lineal y denso tal que $\varphi|_{D(\varphi)}$ es Gateaux-Diferenciable. Entonces:

$$\partial \varphi(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin D(\varphi) \\ \nabla \varphi(x) & \text{si } x \in D(\varphi) \end{cases}$$

- (9) Sean X espacio normado, B un espacio de Banach, $D \subset X$, $a \in D$ un elemento de D .

$\mathcal{L}(D)$: cjtto. de los operadores definidos sobre D a valores en B que se anulan en $a \in D$.

$\mathcal{L}(D)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma

$$\|A\| = \sup_{\substack{x, y \in D \\ x \neq y}} \frac{\|Ax - Ay\|}{\|x - y\|}$$

- (10) Se dirá que un operador $A: B \rightarrow B^*$ es potencial sobre algún conjunto $D \subset B$ si existe un funcional f ,
 $f: D \subset B \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall f(x) = A(x)$, $\forall x \in D$

$$\text{Ej.: } f: H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \|x\| \quad \forall f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

$$f(x) = \|x\|^2 \quad \forall f(x) = 2x$$

NOTA:

$$(\nabla f(x), h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[f(x + th) - f(x) \right]$$

Demostración de (3)

($\Rightarrow$) L maximal monótono $\Rightarrow L$ monótono $\Rightarrow L$ positivo.

Sea $\tilde{L}$ una extensión uniforme lineal positiva de L . Necesariamente $\tilde{L}$ es monótono. Luego $L = \tilde{L}$.

Supongamos que $D(L)$ no es denso. Existe $x \neq 0$, $x \perp D(L)$. Si se define $\tilde{L}$ mediante:

$$\tilde{L} u = \begin{cases} \{Lu\} & u \neq 0 \\ \{x, 0\} & u = 0 \end{cases}$$

$\tilde{L}$ resulta ser monótono, extensión de L . Contradicción.

($\Leftarrow$) L positivo $\Rightarrow L$ monótono.

Si L no es maximal entonces existe $[x, y] \notin G(L)$ tal que $(Lu - y, u - x) \geq 0$, $\forall u \in D(L)$. Si D = espacio generado por $D(L)$ y x , se define $\tilde{L}: D \subset B \rightarrow B^*$ mediante $\tilde{L}(u + \lambda x) = Lu + \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in D(L)$.

Claramente $\tilde{L}$ es lineal. $\tilde{L}$ es positivo pues:

$$\begin{aligned} (\tilde{L}(u + \lambda x), u + \lambda x) &= (Lu + \lambda y, u + \lambda x) \\ &= (-\lambda^2) (L(-\frac{u}{\lambda}) - y, (-\frac{u}{\lambda}) - x) \geq 0 \end{aligned}$$

$\tilde{L}$ es una extensión de L . Por hipótesis $x \in D(L)$. Como

$$0 \leq (L(x + tu) - y, x + tu - x) = t(Lx - y, u) + t^2(Lu, u),$$

$$\forall u \in D(L), t > 0$$

Si $t \rightarrow 0$ $(Lx - y, u) \geq 0$. $D(L)$ es lineal $\Rightarrow (Lx - y, u) = 0$,

$\forall u \in D(L)$.

$D(L)$ denso $\Rightarrow Lx = y$. Contradicción.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARBU, V. "Nonlinear Semigroups and Differential equations in Banach Spaces", Nordhoff Int. Publ., (1976).
- [2] BREZIS, H. "Operateurs Maximaux Monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert", Math. Studies , 5, North Holland, (1973).
- [3] DOLEZAL, V. "Monotone Operators and Applications in Control and Network Theory", ELSEVIER, (1979).
- [4] MINTY, G.J. "On the monotonicity of the gradient of a convex function", Pacific J. of Math., 14, (1964).
- [5] ROCKAFELLAR, R.T. "On the Maximal Monotonicity of Subdifferential Mappings", Pacific Journal of Math., V. 33, N° 1, (1970).
- [6] VAINBERG, M.M. "Variational Methods for the study of Nonlinear Operation", Holden-Day, Inc. (1964).
- [7] VAINBERG, M.M. "Variational Method and Method of Monotone Operators" John Wiley and Sons, N.Y., (1973).