REVISTA PROYECCIONES: 57-76.
JORNADAS MATEMATICAS, AGOSTO 1983.

BIFURCACIONES EN PROBLEMAS NO LINEALES

Dr. JAIME FIGUEROA NIETO*

Con el objeto de ilustrar de manera simple los problemas relativos a la teoría de bifurcación, consideremos los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 (de Euler)

Uno de los primeros estudios de bifurcación se debe a Leonard Euler (1744) quién trató la deformación de una barra sometida a compresión axial (lo que se conoció como Elástica).

Él consideró el PVF :

$$\begin{cases} \theta'' + \lambda \sin \theta = 0 \\ \theta'(0) = \theta'(1) = 0 \end{cases}$$

en que θ es el ángulo entre la tangente a la barra y el eje real

λ es el esfuerzo aplicado

1 la longitud de la barra

* Profesor Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación.
Facultad de Ciencia. Universidad de Santiago de Chile.

La solución trivial $\theta \equiv 0$ es solución del problema, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Esto significa que la barra permanece derecha en equilibrio.

Sin embargo, suponiendo que θ es suficientemente pequeño, el problema se puede mirar como

$$\begin{cases} \theta'' + \lambda \theta = 0 \\ \theta'(0) = \theta'(1) = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución a $\theta(\lambda) = \varepsilon \cos \sqrt{\lambda} t$ con $|\varepsilon|$ suficientemente chico y $\lambda = \pi^2$. Esto es, si λ excede π^2 una nueva familia de soluciones aparece y la barra se deforma.

Se puede dibujar el estado del sistema, por ejemplo dando $\theta(0)$ versus λ .

EJEMPLO 2 (Debido a E. Calabi)

Consideremos el siguiente sistema constituido por un aro con una ranura por donde puede moverse una bolita, aro sujeto a una barra por un hilo.

Se hace girar el aro con una velocidad angular ω . Si ω es pequeña y la bolita ha sido desplazada, ella volverá a la posición de equilibrio. Si ω es suficientemente grande la bolita se ubicará en un punto distinto dependiendo de ω .

Si a partir de este nuevo punto se la mueve un poco, nuevamente volverá al punto.

Las posiciones de la bolita (soluciones del sistema) se encuentran en curvas sobre un cilindro:

EJEMPLO 3 (Derivado del de E. Calabi)

Otro tipo de bifurcación es la de un sistema consistente en una bolita dentro de una esfera. Las bifurcaciones se ilustran en la siguiente figura

Es la bifurcación a órbitas periódicas.

FORMULACION ABSTRACTA.

Sea X, Y dos espacios de Banach y $G : X \rightarrow Y$ una aplicación de X en Y . Sea Z una curva de ceros de G . Un punto interior $\omega \in Z$ se llama un punto de bifurcación para G con respecto a Z si cada vecindad de ω en X contiene soluciones de $G(x) = 0$ que no están en Z .

OBSERVACION.

Usualmente $X \subset \mathbb{R} \times \tilde{X}$ y $Z = \mathbb{R} \times \{0\}$

En este caso las soluciones son de la forma $(\lambda, \tilde{x})$ en que λ es un parámetro de bifurcación usualmente con un significado físico tal como temperatura, magnitud de una fuerza, viscosidad, etc. Los elementos de Z se llaman ceros triviales de G . Interesa conocer las soluciones no triviales que bifurcan de Z .

ORIENTACION.

Se presentará a continuación una teoría de bifurcación que estudia la multiplicidad de las soluciones reales de la ecuación de operadores no lineales $AU = \lambda B$ y la dependencia de estas soluciones del

parámetro real λ .

DEFINICION.

Se dice que la ecuación $Au = \lambda Bu$ tiene un punto de bifurcación en $\lambda = \lambda_0$ si la ecuación tiene al menos dos soluciones distintas $u_1(\lambda)$ y $u_0(\lambda)$ para λ en una vecindad de λ_0 de tal manera que tanto $u_1(\lambda)$ como $u_0(\lambda)$ tiendan a $u_0(\lambda_0)$ cuando λ tienda a λ_0 .

OBS.

Se elige generalmente $u_0(\lambda_0) \equiv 0$.

HIPOTESIS.

Se supondrá

- 1) Un problema de bifurcación tiene una solución u_0 para todos los valores del parámetro λ (la cual, sin pérdida de generalidad puede suponerse idénticamente nula).
- 2) El problema de bifurcación tiene una linearización de la forma $L_1 u = \lambda L_2 u$ en que L_1 y L_2 son operadores lineales acotados en el espacio de Hilbert H .
- 3) El problema de bifurcación puede escribirse en la forma

$$L_1 u + N_1(u) = \lambda(L_2(u) + N_2(u))$$

donde N_1, N_2 son operadores no lineales estrictamente, en el sentido que

$$N_i(0) = 0 \quad y$$

$$\|N_i(u)\| \leq k \|u\|^{\sigma_i} + o(\|u\|^{\sigma_i}), \quad \sigma_i > 1, \quad i = 1, 2 \quad \text{para}$$

$$\|u\| \text{ suficientemente chico.}$$

TEOREMA. (Condición necesaria para los puntos de bifurcación).

Los puntos de bifurcación de la ecuación no lineal

$$L_1 u + N_1(u) + \lambda (L_2 u + N_2(u))$$

pueden ocurrir sólo en puntos del espectro de la ecuación linearizada

$$L_1 u = \lambda L_2 u$$

OBSERVACION.

Este resultado no responde a la cuestión sobre existencia de puntos de bifurcación.

El siguiente ejemplo es una ecuación que no posee puntos de bifurcación y la linearización tiene una cantidad numerable de autovalores:

$$\ddot{u} + \lambda [u + v (u^2 + v^2)] = 0$$

$$\ddot{v} + \lambda [v - u (u^2 + v^2)] = 0$$

$$u(0) = u(a) = v(0) = v(a)$$

y la linearización

$$\ddot{u} + \lambda u = 0$$

$$\ddot{v} + \lambda v = 0$$

En efecto, si (u, v) es solución, necesariamente

$$\int_0^a (u^2 + v^2)^2 = 0, \text{ de donde } u \equiv 0 \text{ y } v \equiv 0$$

DEMOSTRACION.

Se supone λ_0 fuera del espectro de la ecuación $L_1 u = \lambda L_2 u$, esto es : $L_1 - \lambda_0 L_2$ es invertible.

Se prueba que si $|\lambda - \lambda_0|$ y $\|u\|$ son suficientemente pequeños entonces la ecuación no lineal tiene solamente la solución trivial $\equiv 0$.

En efecto, sean $T(u) = L_1 u + N_1(u - (L_2 u + \lambda N_2(u)))$,
 $Vu = L_1 u - \lambda_0 L_2 u$. Reordenando en la ecuación siguiente:

$T(u) = T(u) - \lambda_0 L_2 u + \lambda_0 L_2 u$ se obtiene:

$T(u) = Vu + N_1(u) - \lambda N_2(u) - (\lambda - \lambda_0) L_2 u$. Por lo tanto,

$$\|Vu\| \leq \|T(u)\| + \|N_1(u)\| + |\lambda| \|N_2(u)\| + |\lambda - \lambda_0| \|L_2 u\|$$

Por ser V^{-1} y L_2 operadores continuos, existen $k_0 > 0$, $k_3 > 0$ tales que

$$k_0 \|u\| \leq \|Vu\|, \quad \|L_2 u\| \leq k_3 \|u\|$$

Por hipótesis sobre N_1, N_2 existen $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ tales que

$$\|N_1(u)\| \leq k_1 \|u\|^{\sigma_1}, \quad \|N_2(u)\| \leq k_2 \|u\|^{\sigma_2}$$

Luego,

$$k_0 \|u\| \leq \|T(u)\| + k_1 \|u\|^{\sigma_1} + k_2 |\lambda| \|u\|^{\sigma_2} + |\lambda - \lambda_0| k_3 \|u\|$$

$$\text{Sea } \delta = \min \left\{ \left(\frac{k_0/4}{k_1} \right)^{\frac{1}{\sigma_1-1}}, \left(\frac{k_0/4}{(1+|\lambda_0|)k_2} \right)^{\frac{1}{\sigma_1-1}} \right\}$$

$$s : \|u\| \leq \delta \text{ entonces } k_1 \|u\|^{\sigma_1} \leq \frac{k_0}{4} \|u\| \text{ y}$$

$$k_2 (1 + |\lambda_0|) \|u\|^{\sigma_1} \leq \frac{k_0}{4} \|u\|$$

$$\text{Luego si } |\lambda - \lambda_0| < \min \left\{ 1, \frac{k_0/4}{k_3} \right\} \text{ y } \|u\| \leq \delta$$

entonces

$$k_1 \|u\|^{\sigma_1} + k_2 |\lambda| \|u\|^{\sigma_1} + |\lambda - \lambda_0| k_3 \|u\| \leq \left(\frac{k_0}{4} + \frac{k_0}{4} + \frac{k_0}{4} \right) \|u\|$$

de donde se establece finalmente,

$$\|T(u)\| \geq \frac{k_0}{4} \|u\|$$

lo cual demuestra que sólo la solución trivial $u \equiv 0$ es posible.

UN METODO DE PERTURBACION.

REFERENCIA.

M. Krasnosel'skii "Topological methods in the theory of non-linear integral equations", Pergamon, N.Y. (1964).

Se estudiarán soluciones de norma pequeña de la ecuación no lineal

$$L_1 u + N_1(u) = \lambda (L_2 u + N_2(u)) \quad \dots\dots\dots (*)$$

en la vecindad de un autovalor real aislado λ_n de multiplicidad finita del problema linearizado

$$L_1 u = \lambda L_2 u$$

Sea $\lambda = \frac{1}{\mu}$ y $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ un autovalor real de multiplicidad ρ de la ecuación linearizada

$$L_1 u = \lambda L_2 u, \quad (1 \leq \rho < +\infty)$$

Se eligen ρ autofunciones l.i. $\{u_i\}_{i=1,\dots,\rho}$ asociadas con λ_n tales que

$$(u_i, L_1 u_j) = \delta_{ij}$$

HIPOTESIS.

L_1 es un operador autoadjunto definido positivo en el espacio de Hilbert H .

Se denotará $[u_1, \dots, u_\rho]$ el subespacio generado por $u_1, \dots, u_\rho$ y $P : H \rightarrow [u_1, \dots, u_\rho]^\perp$ la proyección de H sobre el ortogonal de $[u_1, \dots, u_\rho]$.

$$\text{Sea } T(u) = \mu (L_1 u + N_1(u)) - (L_2 u + N_2(u))$$

Entonces,

u es solución de la ecuación no lineal $(*) \iff T(u) = 0$

$$\iff T(u) \in [u_1, \dots, u_\rho] \quad [u_1, \dots, u_\rho]^\perp = N(P) \cap R(P)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} P(T(u)) = 0 \\ (T(u), u_i) = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, \rho \end{array} \right\} \quad (**)$$

La solución u se puede escribir en forma única:

$$u = y + \sum_{i=1}^{\rho} \epsilon_i u_i \in H = R(P) + N(P)$$

donde $y \in [u_1, \dots, u_\rho]^\perp$, $\epsilon_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, \rho$

LEMA.

Bajo las hipótesis hechas, si a) $N_1(u) = 0$ o bien b) $N_2(u) = 0$, la primera ecuación de $(**)$ tiene una única solución " y " en función de $E_1, \dots, E_\rho$

Además, se tiene la siguiente estimación para la solución $y = y(E_1, \dots, E_\rho)$:

$$\|y\| \leq k_3 |E|^{\rho_i} \quad \text{donde} \quad |E| = |E_1| + \dots + |E_\rho|$$

y $k_3 > 0$ es independiente de $(E_1, \dots, E_\rho)$

DEMOSTRACION DEL LEMA.

La primera ecuación de (***) es:

$$y = (\mu L_1 - L_2)^{-1} P (-\mu N_1(u) + N_2(u))$$

Por analogía basta considerar uno de los dos casos.

Consideremos el caso a) $N_1 \equiv 0$ lo que reduce la ecuación a:

$$y = (\mu L_1 - L_2)^{-1} P (N_2)$$

y la ecuación no lineal a

$$L_1 u = \lambda [L_2(u) + N_2(u)]$$

Basta demostrar que la aplicación definida por

$$T_E(z) = (\mu L_1 - L_2)^{-1} P (N_2(z + \sum_{i=1}^{\rho} E_i u_i))$$

es una contracción.

$$\text{Sean } y, \bar{y} \in H, \quad u = y + \sum E_i u_i, \quad \bar{u} = \bar{y} + \sum E_i u_i,$$

entonces

$$T_E(y) - T_E(\bar{y}) = (\mu L_1 - L_2)^{-1} P (N_2(u) - N_2(\bar{u}))$$

Por hipótesis

$$N_2(u) - N_2(\bar{u}) = P_2(u) - P_2(\bar{u}) + R_2(u) - R_2(\bar{u})$$

Por lo tanto

$$\|T_E(y) - T_E(\bar{y})\| \leq \|(\mu L_1 - L_2)^{-1}\| \|N_2(u) - N_2(\bar{u})\|$$

$$\|N_2(u) - N_2(\bar{u})\| \leq k_0 \{\|u\|^{\rho_{2-1}} + \|\bar{u}\|^{\rho_{2-1}}\} \|u - \bar{u}\| + k_1$$

$$\{\|u\|^{\rho_2} + \|\bar{u}\|^{\rho_2}\} \|u - \bar{u}\|$$

Como

$$\|u\| = \|y + [E]_1 u_1\| \leq \|y\| + |E| \sum \|u_i\|$$

escogiendo $\|y\| \leq |E|$, $\|\bar{y}\| \leq |E|$, $|E|$ suficientemente pequeño se tiene:

$$\|u\|^{\rho_2} \leq \|u\|^{\rho_{2-1}} \leq k_2 |E|^{\rho_{2-1}}, \quad \|\bar{u}\|^{\rho_2} \leq \bar{k}_2 |E|^{\rho_{2-1}}$$

de donde concluir,

$$\|T_E(y) - T_E(\bar{y})\| \leq k |E|^{\rho_{2-1}} \|y - \bar{y}\|$$

Luego, si $|E|$ es suficientemente pequeño existe $\alpha < 1$ tal que

$$\|T_E(y) - T_E(\bar{y})\| \leq \alpha \|y - \bar{y}\|$$

de lo cual se concluye que existe un único $y = T_E(y)$ punto fijo solución de la primera ecuación de (***).

Además, como $\|y\| \leq |E|$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 \|y\| &= \|T_E(y)\| \\
 &= \|T_E(y) - T_O(y) + T_O(y)\| \\
 &\leq \|T_E(y) - T_O(y)\| + \|T_O(y)\| \\
 &\leq \|(\mu L_1 - L_2)^{-1}\| \|N_2(u) - N_2(y)\| + \|(\mu L_1 - L_2)^{-1}\| \|N_2(y)\|
 \end{aligned}$$

Se recuerda

$$\|N_2(y)\| \leq k_0 \|y\|^{\rho_2} + k_1 \|y\|^{\rho_{2+1}} \leq k_3 |E|^{\rho_2} \quad \text{si} \quad |E| < 1$$

$$\|N_2(u) - N_2(y)\| \leq k_0 \{\|u\|^{\rho_{2-1}} + \|y\|^{\rho_{2-1}}\} \|u - y\| + k_1$$

$$\{\|u\|^{\rho_2} + \|y\|^{\rho_2}\} \|u - y\|$$

$$u - y = \sum E_i u_i \implies \|u - y\| \leq k_4 |E|$$

$$\|y\|^{\rho_{2-1}} \leq |E|^{\rho_{2-1}}, \quad \|y\|^{\rho_2} \leq |E|^{\rho_2}$$

$$\|u\| \leq \|y\| + |E| \sum \|u_i\| \leq (1+k_5) |E|$$

Por lo tanto

$$\|u\|^{\rho_2} \leq k_6 |E|^{\rho_2}, \quad \|u\|^{\rho_{2-1}} \leq k_7 |E|^{\rho_{2-1}}$$

Luego existe k independiente de $E_i, i = 1, \dots, \rho$ tal que

$$\|y\| \leq k |E|^{\rho_2}$$

BIFURCACION DE UN AUTOVALOR SIMPLE ($\rho = 1$)

Se hace un análisis completo de la existencia, multiplicidad y teoría espectral para la ecuación operacional

$$L_1 u + N_2(u) = \lambda(L_2 u + N_2(u))$$

bajo las hipótesis hechas.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y MULTIPLICIDAD.

Además de las hipótesis hechas se supondrá que $(P_i u_1, u_1) \neq 0$ ($i = 1, 2$) en que u_1 es la autofunción normalizada de la ecuación $L_1 u = \lambda_n L_2 u$. Entonces en el caso a) o en el caso b), la ecuación tiene una única familia a un parámetro de soluciones de norma pequeña con autovalor λ cerca de λ_n .

TEOREMA ESPECTRAL.

Bajo las hipótesis del teorema de existencia, el comportamiento local de las familias a un parámetro de soluciones es cualitativamente descrito por la paridad de los números ρ_1, ρ_2 , el signo de las expresiones $(P_i u_1, u_1)$ ($i = 1, 2$) y el signo de λ_n .

Sustituyendo en el sistema $(**)$ de $(\rho + 1)$ -ecuaciones, se obtiene el sistema de incógnitas y, i :

$$\left. \begin{aligned} y &= (\mu L_1 - L_2)^{-1} P [-\mu N_1(u) + N_2(u)] \\ E_i(\mu - \mu_n) &= (N_2(u) - \mu N_1(u), u_i) ; \quad i=1, \dots, \rho \end{aligned} \right\} (***)$$

ORIENTACION.

En lo que sigue interesarán sólo soluciones de norma pequeña, es decir, se supondrá que tanto $\|y\|$ como los números E_i son pequeños comparados con 1.

HIPOTESIS DE SIMPLIFICACION.

$$a) \quad N_1 \equiv 0 \quad \text{o bien} \quad b) \quad N_2 \equiv 0$$

HIPOTESIS.

Para $\|u\|$, $\|v\|$ suficientemente pequeño.

$$N_i(u) = P_i(u) + R_i(u) \quad i = 1, 2$$

donde P_i es un operador homogéneo de grado $\rho_i > 1$, es decir,

$$P_i(\sigma u) = \sigma^{\rho_i} P_i(u) \quad , \quad \rho_i > 1 \quad \text{y donde}$$

$$\|P_i(u) - P_i(v)\| \leq k_0 \{ \|u\|^{\rho_i-1} + \|v\|^{\rho_i-1} \} \|u - v\|$$

$$\|R_i(u) - R_i(v)\| \leq k_1 \{ \|u\|^{\rho_i} + \|v\|^{\rho_i} \} \|u - v\|$$

en que k_0, k_1 son constantes independientes de u y v .

NOTA.

$$N_i(u) = P_i(u) + R_i(u), \quad i = 1, 2$$

P_i operador homogéneo de grado ρ_i : $P_i(\sigma) = \sigma^{\rho_i} u$

Como $P_i(0) = 0$, $N_i(0) = 0$, entonces $R_i(0) = 0$

$$\|P_i(u) - P_i(v)\| \leq k_0 \{ \|u\|^{\rho_{i-1}} + \|v\|^{\rho_{i-1}} \} \|u-v\|$$

$$\|R_i(u) - R_i(v)\| \leq k_1 \{ \|u\|^{\rho_i} + \|v\|^{\rho_i} \} \|u-v\|$$

en particular

$$\|P_i(u)\| \leq k_0 \|u\|^{\rho_i}$$

$$\|R_i(u)\| \leq k_1 \|u\|^{\rho_{i+1}} = k_1 \|u\|^{\rho_i} \|u\|$$

$$\|N_i(u)\| \leq k_0 \|u\|^{\rho_i} + k_1 \|u\|^{\rho_{i+1}}$$

DEMOSTRACION. (Del Teorema de Existencia)

Se recuerda que $\rho = 1$. Se considera el caso a) $N_1 \equiv 0$.

Por el lema anterior basta considerar la segunda ecuación del sistema (***).

$$E(u - u_n) = (N_2(u), u_1) \dots \dots (1)$$

para $|E|$ suficientemente pequeño.

Se observa:

$$(N_2(u), u_1) = (P_2(u) + R_2(u), u_1)$$

$$= (P_2(Eu_1), u_1) + (P_2(u) - P_2(Eu_1), u_1) + (R_2(u), u_1)$$

en que, por ser P_2 homogéneo:

$$(P_2(Eu_1), u_1) = E^{\rho_2} (P_2(u_1), u_1)$$

De la hipótesis sobre P_2 y R_2 :

$$|(R_2(u), u_1)| \leq \|R_2(u)\| \|u_1\| \leq k \|u\|^{\rho_{2+1}}$$

$$|(P_2(u) - P_2(Eu_1), u_1)| \leq \|P_2(u) - P_2(Eu_1)\| \|u_1\|$$

$$\leq k_0 \{ \|u\|^{\rho_{2-1}} + \|Eu_1\|^{\rho_{2-1}} \} \|u - Eu_1\| \|u_1\|$$

Pero $\|u\| \leq k_2 |E|$, $u = y + Eu_1$, $\|y\| \leq k_3 |E|^{\rho_2}$ entonces

$$|(P_2(u) - P_2(Eu_1), u_1)| \leq k |E|^{2\rho_{2-1}} \leq k |E|^{\rho_{2+1}}$$

Luego

$$E(\mu - \mu_n) = (P_2(Eu_1), u_1) (1 + O(1))$$

Por lo tanto, para $|E|$ suficientemente pequeño, las soluciones de (1) puede ser completamente descritas estudiando las soluciones de la ecuación

$$(\mu - \mu_n) = (P_2(Eu_1), u_1) = E^{\rho_2} (P_2(u_1), u_1)$$

que para $E \neq 0$ es equivalente a:

$$E^{1-\rho_2} (\mu - \mu_n) = (P_2(u_1), u_1) = \text{constante}$$

Se recuerda $u = y + Eu_1$ en que $y = y(E)$

Luego para $|E|$ suficientemente pequeño, las soluciones de $L_1 u = \lambda(L_2 u + N_2(u))$ cerca de $\lambda = \lambda_n$ pueden ser descritas como una familia a 1-parámetro $u(E) \ni u(E) \rightarrow u_0 \equiv 0$ cuando $E \rightarrow 0$.

Note que si $E = 0$ necesariamente $y = 0$, por lo tanto la ecuación no lineal correspondiente a $\lambda = \lambda_n$ tiene sólo la solución trivial $u_0 \equiv 0$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA ESPECTRAL.

Para el caso a) bastaba observar la ecuación

$$E(\mu - \mu_n) = E^{\rho_2} (P_2(u_1), u_1)$$

y para el caso b)

$$E(\mu - \mu_n) = -\mu E^{\rho_1} (P_1(u_1), u_1)$$

Por lo tanto la dependencia cualitativa de λ sobre E cerca de $\lambda = \lambda_n$ depende de la paridad de ρ_1 ó ρ_2 y de los signos de los factores.

Caso a). $\lambda_n > 0$

ρ_2 impar signo factor $< 0 \implies$ hay dos soluciones para $\lambda < \lambda_n$, no
hay solución si $\lambda > \lambda_n$.

signo factor $> 0 \implies$ situación al revés.

ρ_2 par signo factor $> 0 \implies$ hay solución única para todo λ .

signo factor $< 0 \implies$ situación al revés.

Caso b). $\lambda_n > 0$

por el signo negativo, las conclusiones son las contrarias de las del caso a).

EJEMPLO.

Sea G un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ y considera el PVF

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u + \lambda(e(x)u + f(u)) = 0 \quad \text{en } G \\ u = 0 \quad \text{en } \partial G \end{array} \right.$$

$$\text{Aquí } f(u) = \alpha_q u^q + \alpha_{q+1} u^{q+1} + \dots \quad (q \text{ entero } > 1 \\ \alpha_q \neq 0)$$

y $e(x) > 0$.

Se tiene que $\lambda_n > 0$, λ_1 necesariamente de multiplicidad 1

y $(P_2 u, u) = \int_G \alpha_q u^{q+1}$. Si q es impar y $\alpha_q > 0$ ó $\alpha_q < 0$ se apli
can los resultados del estudio.