"CUADRATURA EXTENDIDA DE GAUSS - LEGENDRE"
(SEMINARIO DE TITULACION CARRERA PEDAGOGIA
MATEMATICAS Y FISICA)

PROFESOR GUIA: OSCAR ROJO J. (*)
SEMINARISTAS : RUBEN BARRIENTOS V.
GERMAN HIPLAN A.

Las siguientes líneas tienen por propósito presentar algunos aspectos y resultados del Seminario de Titulación "Cuadratura Extendida de Gauss - Legendre" realizado, bajo la dirección de este profesor guía, por los alumnos de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas y Física, Sres. Rubén Barrientos Vargas y Germán Hiplan Araya.

1. FORMULA DE LA CUADRATURA EXTENDIDA DE GAUSS-LEGENDRE.

1.1. INTRODUCCION.

La fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (1.1)$$

es exacta hasta polinomios de grado $(2n+1)$, cuando x_i son los ceros del polinomio de Legendre de grado $(n+1)$ y los coeficientes a_i están dados por

(*) Ph.D. in Mathematics.

Profesor Depto. Matemáticas U. del Norte

$$a_i = \int_{-1}^1 P_i(x) dx$$

siendo $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ los polinomios fundamentales de Lagrange. Existen tablas que nos dan los ceros x_i y los coeficientes a_i para diferentes valores de n . Esta fórmula es conocida como la Fórmula de Cuadratura de Gauss-Legendre.

En el caso de la Cuadratura Extendida de Gauss-Legendre, la integral es aproximada mediante la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^{n+1} B_j f(y_j), \quad (1.2)$$

donde los puntos x_i son los ceros del polinomio de Legendre L_n de grado n . Los coeficientes A_i , B_j y los puntos y_j son determinados de modo que el grado de exactitud sea extendido a $(3n+1)$. Para ello puede emplearse el siguiente procedimiento general: Se define E_{n+1} como el polinomio mónico cuyos ceros son los $(n+1)$ puntos y_j . Imponiendo que (1.2) sea exacta hasta polinomios de grado $(3n+1)$ resulta

$$\int_{-1}^1 L_n(x) E_{n+1}(x) x^k dx = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Escribiendo

$$E_{n+1}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n + x^{n+1}$$

y reemplazando en (1.3) se obtiene un sistema triangular de ecuaciones lineales en las incógnitas $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$.

Este sistema triangular tiene solución única. Determinados los coeficientes de E_{n+1} , la resolución de

la ecuación

$$E_{n+1}(x) = 0,$$

permite determinar los ceros y_j . Finalmente, mediante un nuevo sistema de ecuaciones, obtenido usando la fórmula (1.2) para $f(x)$ igual sucesivamente a $1, x, x^2, \dots, x^{2n}$, se obtienen los coeficientes A_i y B_j .

1.2. EL POLINOMIO E_{n+1} .

Un análisis simple de los sistemas triangulares de ecuaciones para los coeficientes de E_{n+1} conduce a las siguientes conclusiones.

a) si n es impar entonces

$$E_{n+1}(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \dots + C_{n-1} x^{n-1} + x^{n+1} \quad (1.4)$$

y sus coeficientes satisfacen el sistema de ecuaciones,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I(n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I(n) & I(n+2) \\ 0 & 0 & \dots & I(n) & I(n+2) & I(n+4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(n) & I(n+2) & \dots & \dots & I(2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \\ \dots \\ C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(n+2) \\ I(n+4) \\ I(n+6) \\ \dots \\ I(2n+1) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

donde $I(j) = \int_{-1}^1 L_n(x) x^j dx$.

b) En cambio, si n es par entonces

$$E_{n+1}(x) = C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \dots + C_{n-1} x^{n-1} + x^{n+1} \quad (1.6)$$

y sus coeficientes pueden ser obtenidos del sistema,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I(n) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I(n) & I(n+2) \\ 0 & 0 & \dots & I(n) & I(n+2) & I(n+4) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(n) & I(n+2) & \dots & \dots & I(2n-2) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \\ \dots \\ C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(n+2) \\ I(n+4) \\ \dots \\ I(2n) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

La resolución de los sistemas de ecuaciones (1.5) y (1.7) permitió determinar el polinomio E_{n+1} para algunos valores de n . Los resultados son dados en la tabla siguiente.

Tabla 1.1

n	$E_{n+1}(x)$
1	$E_2(x) = x^2 - \frac{3}{5}$
2	$E_3(x) = x^3 - \frac{6}{7} x$
3	$E_4(x) = x^4 - \frac{10}{9} x^2 + \frac{155}{891}$
4	$E_5(x) = x^5 - \frac{15}{11} x^3 + \frac{615}{1573} x$
5	$E_6(x) = x^6 - \frac{21}{13} x^4 + \frac{567}{845} x^2 - \frac{8043}{186745}$
6	$E_7(x) = x^7 - \frac{28}{15} x^5 + \frac{3878}{3825} x^3 - \frac{183059962}{1294185589} x$

A medida que n crece se comienza a observar un mal condicionamiento en la resolución de los sistemas (1.5) y (1.7). Esto tiene su origen en que sucesión de valores $I(n)$ es monotonamente decreciente tendiendo a cero cuando n tiende a infinito. Más adelante se presentará una forma alternativa, basada en desarrollos en términos polinomios de Chebyshev, para obtener E_{n+1} que evita la inestabilidad numérica antes señalada.

Determinados los polinomios E_{n+1} para los valores de n dados en la tabla anterior, la resolución numérica de la ecuación $E_{n+1}(x)=0$ permitió determinar sus ceros, los que son dados en la tabla 1.2

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{N-1}^2 & y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_N^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & \dots & x_{N-1}^4 & y_1^4 & y_2^4 & \dots & y_N^4 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1^{2n} & x_2^{2n} & \dots & x_{N-1}^{2n} & y_1^{2n} & y_2^{2n} & \dots & y_N^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N-1} \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/_{2n+1} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

quedando A_N dado por la fórmula

$$A_N = 2 \left[1 - \sum_{i=1}^{N-1} A_i - \sum_{j=1}^N B_j \right] \quad (1.10)$$

Aprovechamos de comentar que (1.8) es también exacta para $f(x) = x^{3n+2}$. Así entonces la fórmula (1.8) es exacta hasta polinomios de grado $3n+2$.

b) n par.

Ahora $N = \frac{n}{2}$ y la fórmula (1.2) puede ser reducida a

1.3. LOS COEFICIENTES A_i Y B_j .

Aplicando repetidamente la fórmula (1.2) para $f(x)$ igual a $1, x, x^2, \dots, x^{2n}$ se obtiene un sistema de orden $(2n+1) \times (2n+1)$, en las incógnitas $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$. Sin embargo, la simetría respecto del origen, de los ceros de L_n y de E_{n+1} permiten reducir considerablemente el tamaño de dicho sistema de ecuaciones. Para ello es conveniente considerar separadamente los casos n par y n impar. El estudio de cada uno de ellos conduce a las siguientes conclusiones:

a) n impar.

Sea $N = \frac{n+1}{2}$. En este caso la fórmula

(1.2) llega a ser a

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^{N-1} A_i [f(x_i) + f(-x_i)] + A_N f(0) + \sum_{j=1}^N B_j [f(y_j) + f(-y_j)], \quad (1.8)$$

donde los coeficientes A_i y B_j están dados por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N A_i \left[f(x_i) + f(-x_i) \right] + \sum_{j=1}^N B_j \left[f(y_j) + f(-y_j) \right] + B_{2N+1} f(0) . \quad (1.12)$$

Los coeficientes A_i y B_j pueden ser obtenidos del sistema

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 & y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_N^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & \dots & x_N^4 & y_1^4 & y_2^4 & \dots & y_N^4 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_1^{2n} & x_2^{2n} & \dots & x_N^{2n} & y_1^{2n} & y_2^{2n} & \dots & y_N^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_N \\ B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1/_{2n+1} \end{bmatrix} , \quad (1.13)$$

quedando B_{2N+1} dado por

$$B_{2N+1} = 2 \left[1 - \sum_{i=1}^N A_i - \sum_{j=1}^N B_j \right] \quad (1.14)$$

La aplicación de (1.9), (1.10), (1.13) y (1.14) permitió determinar los coeficientes A_i y B_j para algunos valores de n , los que son incluidos en la tabla 1.2. Esta tabla incluye también los ceros de L_n y de E_{n+1} .

Tabla 1.2

n	x_i	A_i	y_i	B_j
1	0.00000 00000	0.88888 88889	$\pm$ 0.77459 66692	0.55555 55556
2	$\pm$ 0.57735 02692	0.49090 90909	0.00000 00000	0.62222 22222
			$\pm$ 0.92582 00998	0.19797 9798
3	0.00000 00000	0.45091 65386	$\pm$ 0.43424 37493	0.40139 74148
	$\pm$ 0.77459 66692	0.26848 80899	$\pm$ 0.96049 12687	0.10465 6226
4	$\pm$ 0.33998 10436	0.32694 91893	0.00000 00000	0.34644 29824
	$\pm$ 0.86113 63116	0.17005 36051	$\pm$ 0.64028 62175	0.26679 83407
			$\pm$ 0.97656 02507	0.06297 73737
5	0.00000 00000	0.28298 74178	$\pm$ 0.27963 0413	0.27284 98017
	$\pm$ 0.53846 93101	0.24104 03397	$\pm$ 0.75416 67271	0.18680 07969
	$\pm$ 0.90617 98459	0.11523 33153	$\pm$ 0.98408 53595	0.04258 20375
6	$\pm$ 0.23861 91861	0.23377 08627	0.00000 00000	0.24107 25818
	$\pm$ 0.66120 93865	0.18107 19934	$\pm$ 0.46311 82125	0.21320 96535
	$\pm$ 0.93246 95142	0.08369 44401	$\pm$ 0.82137 33408	0.13732 06052
			$\pm$ 0.98870 32026	0.03039 61542

2. COMPUTO DE E_{n+1} MEDIANTE EL USO DE POLINOMIOS DE CHEBYSHEV.

El cómputo de los coeficientes de E_{n+1} implica divisiones sucesivas por $I(n)$, valor que tiende a cero cuando n crece. Esto origina una inestabilidad numérica a partir de cierto n . El método que a continuación se resume no presenta esta dificultad, sus fórmulas son de tipo recursivo que no implican el cómputo de integrales. Además, es posible emplear el algoritmo de Clenshaw para evaluar eficientemente E_{n+1} durante la determinación de sus ceros.

2.1. DESARROLLO DE E_{n+1} EN TERMINOS DE POLINOMIOS DE CHEBYSHEV.

La notación T_n será empleada para designar el polinomio de Chebyshev de grado n . Como antes E_{n+1} será un polinomio cuyos ceros son los puntos y_j de la fórmula (1.2). Pero, ahora E_{n+1} no será mónico y esta condición será reemplazada por $d_m=1$ en los desarrollos

$$E_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^m d_i T_{2i}(x), \quad n \text{ impar} \quad (2.1)$$

$$E_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^m d_i T_{2i+1}(x), \quad n \text{ par} \quad (2.2)$$

donde m es la parte entera de $\frac{n+1}{2}$. Como (1.2) debe ser exacta hasta polinomios de grado $(3n+1)$, la siguiente fórmula es válida.

$$\int_{-1}^1 L_n(x) E_{n+1}(x) T_k(x) dx = 0, \quad k=0,1,2,\dots,n. \quad (2.3)$$

El reemplazo de (2.1) y (2.2) en (2.3), el posterior empleo de la fórmula de recursión de los polinomios de Chebyshev y de otras propiedades de estos polinomios conducen a las fórmulas siguientes para el cómputo de los coeficientes d_i :

$$d_{m-1} = Z_1 - 1 \quad (2.4)$$

Para $q = 2, 3, \dots, m$

$$d_{m-q} = \sum_{s=1}^{q-1} d_{s-q+m} Z_s + Z_q \quad (2.5)$$

$$d_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} d_i Z_i + \frac{1}{2} Z_m \quad (\text{si } n \text{ impar}) \quad (2.6)$$

donde

$$Z_p = \frac{\int_{-1}^1 L_n(x) T_{n+2p}(x) dx}{\int_{-1}^1 L_n(x) T_n(x) dx} \quad (2.7)$$

2.2. COMPUTO DE LOS Z_s .

Es posible obtener un procedimiento recursivo para el cómputo de los valores Z_s que no requiere de la evaluación de integrales. Tal procedimiento está dado por

$$Z_1 = \frac{n+2}{2n+3} \quad (2.8)$$

$$Z_{s+1} = \frac{[(n+2s)(n+2s-1) - n(n+1)](n+2s+2)}{[(n+2s+2)(n+2s+3) - n(n+1)](n+2s)} Z_s \quad (2.9)$$

La derivación de las fórmulas (2.4), (2.5), (2.6) (2.8) y (2.9) se presenta en detalle en el Seminario de Titulación que se resume.

El uso de las fórmulas (2.8), (2.9), (2.4), y (2.6) permitió obtener los siguientes desarrollos de E_{n+1} en términos de polinomios de Chebyshev.

Tabla 2.1

n	$E_{n+1}(x)$
2	$E_3(x) = T_3(x) - \frac{3}{7} T_1(x)$
3	$E_4(x) = T_4(x) - \frac{4}{9} T_2(x) - \frac{47}{891}$
4	$E_5(x) = T_5(x) - \frac{5}{11} T_3(x) - \frac{170}{1573} T_1(x)$
5	$E_6(x) = T_6(x) - \frac{6}{13} T_4(x) - \frac{93}{845} T_2(x) - \frac{4994}{186745}$
6	$E_7(x) = T_7(x) - \frac{7}{15} T_5(x) - \frac{427}{3825} T_3(x) - \frac{4412191}{3706425} T_1(x)$
7	$E_8(x) = T_8(x) - \frac{8}{17} T_6(x) - \frac{620}{5491} T_4(x) - \frac{35864}{653429} T_2(x) - \frac{81650693}{4854324041}$

2.3. EVALUACION DE E_{n+1} MEDIANTE EL USO DEL ALGORITMO DE CLERSHAW.

El uso repetido de la fórmula de recursión de los polinomios de Chebyshev permite derivar muy fácilmente el siguiente algoritmo para la evaluación de E_{n+1} .

a) n par .

En este caso, el algoritmo queda dado por

$$1) \quad E_{n+1} = 1$$

$$Z_n = 2x$$

$$2) \quad \text{Para } j = \frac{n-2}{2}, \dots, 1$$

$$Z_{2j+1} = 2xZ_{2j+2} - Z_{2j+3} + d_j$$

$$Z_{2j} = 2xZ_{2j+1} - Z_{2j+2}$$

$$3) \quad E_1 = 2xZ_2 - E_3 + d_0$$

$$4) \quad E_{n+1}(x) = Z_1x - E_2$$

b) n impar .

Para n impar, la evaluación de $E_{n+1}(x)$ puede ser efectuada mediante

$$1) Z_{n+1} = 1$$

$$Z_n = 2x$$

$$2) \text{ Para } j = \frac{n-1}{2}, \dots, 1$$

$$Z_{2j} = 2xZ_{2j+1} - Z_{2j+2} + d_j$$

$$Z_{2j-1} = 2xZ_{2j} - Z_{2j+1}$$

$$3) E_{n+1}(x) = Z_1 x - Z_2 + d_0$$

El algoritmo presentado para la evaluación de E_{n+1} , es una versión particular de un algoritmo más general debido a Clenshaw para evaluar funciones expandidas en polinomios ortogonales que satisfacen una relación de recurrencia de tres términos.

Finaliza el Seminario con la aplicación de los métodos y algoritmos expuestos en esta segunda parte para $n = 7$.

Para este valor de n la fórmula de cuadratura extendida de Gauss-Legendre tiene la forma

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx = & A_1 [f(x_1) + f(-x_1)] + A_2 [f(x_2) + f(-x_2)] + A_3 [f(x_3) + \\ & + f(-x_3)] + A_4 f(0) + B_1 [f(y_1) + f(-y_1)] + \\ & + B_2 [f(y_2) + f(-y_2)] + B_3 [f(y_3) + f(-y_3)] + \\ & + B_4 [f(y_4) + f(-y_4)] \quad , \end{aligned}$$

fórmula que es exacta hasta polinomios de grado 23. Los
ceros

$$x_1 = 0.40584 \ 51514$$

$$x_2 = 0.74153 \ 11856$$

$$x_3 = 0.94910 \ 79123$$

del polinomio de Legendre L_7 , y los ceros encontrados para E_8 :

$$y_1 = 0.20778 \ 49547, \quad y_5 = -y_1$$

$$y_2 = 0.58608 \ 72357, \quad y_6 = -y_2$$

$$y_3 = 0.86486 \ 44231, \quad y_7 = -y_3$$

$$y_4 = 0.99145 \ 53714, \quad y_8 = -y_4.$$

permiten obtener de (1.9) y (1.10) los coeficientes A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , B_1 , B_2 , B_3 y B_4 , habiéndose obtenido para ellos los siguientes valores.

$$A_1 = 0.19035 \ 05787 \quad B_1 = 0.20443 \ 29401$$

$$A_2 = 0.14065 \ 32598 \quad B_2 = 0.16900 \ 47262$$

$$A_3 = 0.06309 \ 20934 \quad B_3 = 0.10479 \ 00099$$

$$A_4 = 0.20948 \ 21406$$

3. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- (1) DAHLQUIST, BJORCK, ANDERSON. "Numerical Methods", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J. 1974.
- (2) KREIDER, DONALD L., OSBERG, KULLER, PERKIN. "Introducción al Análisis Lineal", Fondo Educativo Interamericano. Vol.2, 1971.
- (3) C. MOLLER V. "Integración Numérica". Seminario Superior, Universidad del Norte. 1977.
- (4) GIOVANNI MONEGATO. "A note on Extended Gaussian Quadrature Rules", Mathematics of Computation, Volume 30, Number 136. October 1976, Pages 812 - 817.
- (5) GIOVANNI MONEGATO. "Positivity of the Weights of Extended Gauss-Legendre Quadrature Rules". Math. Of Computation, Volume 32, Number 141, January 1978, pages 243 - 245.
- (6) GIOVANNI MONEGATO. "Some Remarks on the Construction of Extended Gaussian Quadrature Rules". Math. of Computation, Volume 32, Number 141, January 1978, pages 247-252.
- (7) T.N.L. PATTERSON. "The Optimum Addition of Points to Quadrature Formulae", Math. Comp., v. 22, 1968, pp. 847 - 856.
- (8) ROBERT PIESSENS AND MARIA BRANDERS. "A note on the Optimal Addition of Abscissas to Quadrature Formulae of Gauss and Lobatto Tupe", Math. of Comp. Volume 28, Number 125, January 1974, pages 135-139.
- (9) M.A.SNYDER. "Chebeshev Methods in Numerical Approximation", Courant Institute of Math. Sciences, New York University, Prentice-Hall, Inc.