DOI: 10.22199/S07160917.1983.0004.00004

ALEATORIDAD DE LOS PARAMETROS EN UN PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL

ALFREDO VASQUEZ S. (*)

RESUMEN.

Se presenta el problema de programación lineal afectado por aleatoridad de los parámetros. Para este problema estocástico se formula el problema determinístico bajo la hipótesis de independencia y normalidad.

INTRODUCCION.

Sabemos que el problema de programación lineal es del tipo:

$$\min \{ \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x} \ : \ A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \ , \ \underset{\sim}{x} \geqslant o \}$$

donde : $\underset{\sim}{c} \ \varepsilon \ \mathbb{R}^n \ , \ \underset{\sim}{b} \ \varepsilon \ \mathbb{R}^m$

A_{mxn} es una matriz de m filas y n columnas.

$\underset{\sim}{x} \ \varepsilon \ \mathbb{R}^n$ es el vector de actividades y $\underset{\sim}{x} \geqslant o$

(*) Master en Ciencias.
Profesor Departamento Matemáticas U.del Norte

significa $x_i \geq o$.

La solución a este problema es una solución factible $\underset{\sim}{x}_o$ tal que $\underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x}_o < \underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{x}$ para todo

$$\underset{\sim}{x} \in \{ \underset{\sim}{x} : A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \ , \ \underset{\sim}{x} \geq o \}.$$

La solución supone que los parámetros envueltos son constantes. Este hecho no es siempre cierto como se mostrará en el ejemplo siguiente. Supongamos que la empresa XYZ tiene una planta productora de 3 clases de productos y sus actividades no-negativas son x_1 , x_2 y x_3 con una ganancia neta por unidad producida c_1 , c_2 y c_3 respectivamente. Las hora-hombre y capital a gastar en producción son b_1 y b_2 . Ya que la meta es obtener máximas ganancias, el problema de programación lineal será:

$$\text{maximice} : \ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\text{tal que} \ : \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

donde a_{ij} es el exacto requerimiento de insumo i por unidad producida j.

Se observa que algunos o todos los parámetros del problema previo pueden ser variables aleatorias más bien que constantes. En efecto, cada c_j es una ganancia neta por unidad determinada de los ingresos y costos para el j-ésimo producto. Pero, cuando las decisiones son tomadas debido a la demanda, oportunidad, mercado, etc., la ganancia neta en cada producto puede ser una variable aleatoria con alguna distribución. Aún más, como un resultado del control de calidad, de problemas técnicos durante la producción, y otros factores, el insumo exacto por unidad producida (a_{ij}), puede no ser siempre conocido con certeza aún cuando la experiencia puede proveer una estima muy razonable de a_{ij} (incluyen do su varianza). Finalmente, es posible que durante el periodo de producción, debido al ausentismo del personal y de las reparaciones los valores b_1 y b_2 tengan alguna variación y sus valores sean más bien estimaciones o aproximaciones más bien que constantes.

Esta presentación da origen a lo que se llama programación lineal estocástica (PLE). La definición dada por Peter Kall (1) dice "la programación lineal estocástica se preocupa de problemas que aparecen cuando algunos o todos los coeficientes de un problema de programación lineal son variables estocásticas con distribución de probabilidad (conjunta) conocida".

Esencialmente hay dos tipos de modelos en PLE:

i) "Esperar y ver" : este modelo se basa en el supuesto de que el que toma la decisión es capaz de esperar por una realización de las variables aleatorias y tomar su decisión con información basada en esta realización, es decir, si $\tilde{c}$, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ son una realización de las variables aleatorias c, A, b el problema que se resuelve es:

$$\min \quad \tilde{c}^T x$$

$$\text{tal que} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

$$x \geq 0$$

Este último se llama "problema de distribución". Como c, A, b son variables aleatorias la interpretación del problema puede ser la siguiente: dado un programa de producción (con estructura lineal), este puede ser adaptado para cualquier período corto a realizaciones del factor aleatorio (c, A, b), pero la planificación del proyecto para un período largo (muchos períodos cortos) el que toma la decisión necesita saber la cantidad requerida por este programa de producción para un alto porcentaje del tiempo. En otras palabras, el que toma decisiones desea saber la esperanza de la distribución de probabilidad de los costos del programa de producción por período (corto).

ii) "Aquí y ahora". Este modelo está basado en el siguiente supuesto: Una decisión sobre χ - o una "Estrategia" para χ - debe hacerse anticipadamente o al menos sin conocimiento de la realización de las variables aleatorias. Se entiende por una "estrategia para X" una medida de probabilidad P_X en un conjunto boreliano $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$. Si agregamos la restricción de que existe $\tilde{X} \varepsilon X$ con P_X ({ $\tilde{\chi}$ }) = 1, entonces tendremos una estrategia pura. En este modelo, alguno o todos los parámetros, o coeficientes, son variables aleatorias con una distribución de probabilidad conjunta. Esto implica que: existe un espacio de probabilidad (Ω, $\mathcal{Q}$, P_ω) tal que { $A(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$ } es una transformación medible de Ω en $\mathbb{R}^{mxn}$ x $\mathbb{R}^m$ x $\mathbb{R}^n$ con el supuesto: P_ω es conocido. Si estamos usando estrategias mixtas (P_X ({ X }) $\neq$ 1) entonces, P_X debe ser independiente de P_ω, es decir, la medida de probabilidad de $\mathfrak{X}$ x Ω es $P_X \cdot P_\omega$.

A continuación se hará una presentación de los problemas del tipo "aquí y ahora" que originan distintos tipos de problemas determinísticos de acuerdo a la aleatoriedad de algunos o todos los parámetros en el problema de programación lineal. Esencialmente el problema consiste en obtener una forma determinística de un problema de programación estocástica.

PROGRAMAS ESTOCASTICOS.

La función criterio de construcción fue dada por P. Kall y es:

"Dado un espacio probabilístico (Ω, $\mathcal{Q}$, P_ω) y una transformación medible:

$$(A(\omega), b(\omega), c(\omega)) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{mxn} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \text{ y}$$

un conjunto boreliano $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ de estrategias factibles pu ras, definiremos:

i) $E = \{ c^T(\omega)X,\ A(\omega)X - b(\omega) \mid \omega\varepsilon\Omega\ , x\ \varepsilon\ \mathfrak{X}\}$

ii) $\mathfrak{B} = \{ P_x : P_x$ es una medida de probabilidad sobre $\mathfrak{X}\}$.

iii) $L : E \to \mathbb{R}$ (L es una función de pérdida).

iv) Φ tal que $\Phi L = F : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$.

El problema entonces es minimizar F en $\mathfrak{B}$.

Supongamos que:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{X} \cap \{ x \mid P_\omega(A(\omega)x - b(\omega) \geqslant \alpha \}\ ,\ \alpha\ \varepsilon\ [0,1]$$

$$L\ (e\ (\omega,x)) = c'x$$

$$\phi L = E_\omega\ L(e\ (\omega,x)\ )$$

así que el problema será:

$$\min_{\mathfrak{B}}\ E_\omega\ L\ (e(\omega,x)\ )$$

$$\text{o}\ \min\ E_\omega\ c^T\ (\omega)\ X$$

$$\text{tal que}\ P_\omega(A\ (\omega)x - b(\omega) \geqslant \alpha\ ,\ x\ \varepsilon\ \mathfrak{X}.$$

Este es un problema de programación restringido por probabilidad y significa que la esperanza de la función objetivo original c'X será minimizada con respecto a las restricciones que $x\varepsilon\mathfrak{X}$ (normalmente $x \geqslant o$) y que la de cisión (o estrategia pura) X debe ser factible en $Ax \geq b$ con probabilidad al menos α .

Hay dos versiones de programas restringidos por probabilidad.

$$\min \varphi(x)$$
$$\text{sujeto a : } P_\omega (\{ \omega \mid A(\omega)\, x \geq b(\omega)\}) \geq \alpha \quad .$$

o

$$\min \varphi(x)$$
$$\text{sujeto a : } P_\omega (\{ \omega \mid A_i(\omega)x \geq b_i(\ )\} \quad \geq \alpha_i \quad i=1,2,,m.$$

donde $A_i(\omega)$ y $b_i(\omega)$ son i-ésima fila de A y la i-ésima componente de $b(\omega)$.

Aunque siendo $\varphi(x)$ una función convexa y $\mathbb{X}$ es un conjunto convexo, no garantizan la convexidad de

$$X(\alpha) = \{ x \mid P_\omega(\{ \omega \mid A(\omega) \geq b(\omega) \ ) \geq \alpha \ \}.$$

$$X_i(\alpha_i)=\{ x \mid P_\omega(\{ \omega \mid A_i(\omega) \geq b_i(\omega) \ \}) \geq \alpha_i\}$$

A continuación se mencionarán dos teoremas que nos garantizan la convexidad de $X(\alpha_i)$.

<u>TEOREMA</u>.

Supongamos que las variables aleatorias $a_{i_1}(\omega),\ldots a_{i_n}(\omega)$ y $b_i(\omega)$ tienen una (n + 1) - distribución normal conjunta. Entonces $X_i(\alpha_i)$ es convexo para $\alpha_i \geq 1/2$. Para $0 < \alpha_i < 1/2$ $X_i(\alpha_i) = \mathbb{R}^n$ o $X_i(\alpha_i)$ es un conjunto no vacío y no convexo.

TEOREMA.

Supongamos que la matriz de coeficientes A es fija y $b(\omega)$ es aleatorio. Entonces:

$i = 1, 2, \ldots, m$

$$X_i(\alpha_i) = \{ X \mid P_\omega(\omega \mid A_i x \geqslant b_i(\omega)) \geqslant \alpha_i \}.$$

es convexo para toda distribución de probabilidad de $b(\omega)$.

Los elementos anteriores nos permitirán analizar el problema de programación lineal estocástica, y una formulación determinística de ellos suponiendo independencia y normalidad en la distribución conjunta de los parámetros. También se considerará la aleatoriedad de algunos o todos los parámetros del problema de programación estocástica.

i) Problema con los coeficientes de insumo producto o técnicos-aleatorios (a_{ij}).

El problema de programación lineal es:

$$\min c^T x$$

$$\text{sujeto a: } \sum_j a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad i = 1, 2, , m$$

$$x_j \geqslant o \quad j = 1, 2, , n$$

donde $a_{ij} \sim N(m_{a_{ij}}, \sigma^2_{a_{ij}})$ y son independientes para todo i y j.

Luego $\sum_j a_{ij} x_j \sim N(\sum m_{a_{ij}} x_j , \sum_j \sigma^2_{a_{ij}} x_j^2)$

$P(\Sigma \ aij \ x_j \geqslant b_i) \geqslant \alpha_i$, con $Z \alpha_i > o$.

$$P\left(\frac{\Sigma\, aij\ xj - m_{a_{ij}}\ x_j}{(\Sigma\, \sigma^2_{a_{ij}}\, x_j{}^2)^{1/2}} \geq \frac{b_i - \Sigma\, m_{a_{ij}}\ xj}{(\Sigma\, \sigma_{a_{ij}}\, x_j^2)^{1/2}}\right) \geq \alpha_i$$

Esto es cierto si y solo si

$$-\frac{b_i - \Sigma\, m_{a_{ij}}\ x_j}{(\Sigma\, \sigma^2_{aij}\ x_j^2)^{1/2}} \geq Z_\alpha$$

$$\Sigma m_{a_{ij}} x_j - Z_\alpha \quad \Sigma\, \sigma^2_{a_{ij}}\ x_j^2 \geq b_i$$

Luego la forma determinística es:

minimice $c^T x$

sujeta a : $\Sigma\, m_{a_{ij}} x_j - Z_\alpha \quad (\Sigma\, \sigma^2_{a_{ij}}\ x_j^2)^{1/2} \geq b_i$

$x\ j \geq o$

$i = 1, 2,.., m$

$j = 1, 2,.., n$

y tiene la forma no lineal.

En las restricciones vemos que el término $\Sigma\, \sigma^2_{a_{ij}}\ x_j^2$ es una forma cuadrática positiva que puede ser reducida si los coeficientes a_{ij} son definidos en forma tal que su varianza sea mínima (óptimo si es cero). Si esto ocurre, la forma cuadrática tendría un mínimo valor y la solución sería más próxima a la obtenida al conside rar el problema como uno de programación lineal.

Como el objetivo es sólo obtener la forma determinística de un problema estocástico, indicaremos que existen algoritmos matemáticos que resuelven el problema. Estos pueden estudiarse en textos de métodos de optimización no lineal.

Similarmente podemos obtener las formas determinísticas de las otras situaciones estocásticas.

ii) Restricción de requerimientos aleatorios. (insumos disponibles aleatorios).

Supuesto $b_i \sim N(m_{b_i}, \sigma^2_{b_i})$.

Luego:

$$P(\Sigma a_{ij} \geqslant b_i) \geqslant \alpha_i$$

$$P\left(\frac{\Sigma a_{ij} x_j - m_{b_i}}{\sigma_{b_i}} \geqslant \frac{b_i - m_{b_i}}{\sigma_{b_i}}\right) \geqslant \alpha_i$$

lo que lleva a:

$$\frac{\Sigma a_{ij} x_j - m_{b_i}}{\sigma_{b_i}} \geqslant Z\, \alpha_i$$

quedando el problema:

$$\min c^T x$$

$$\text{sujeto a : } \Sigma a_{ij} x_j \geqslant m_{b_i} + Z_{\alpha_i} \sigma_{b_i}$$

$$x \geqslant 0$$

que es un problema de programación li neal.

iii) Coeficientes de insumo-producto e insumos disponibles aleatorios (a_{ij} y b_i aleatorios).

En este caso $a_{ij} \sim N(m_{a_{ij}}, \sigma^2_{a_{ij}})$

$b_i \sim N(m_{b_i}, \sigma^2_{b_i})$

Luego:

$$\Sigma a_{ij} x_j - b_i \sim N(\Sigma a_{ij} x_j - m_{b_i}, x^T V_i x + \sigma^2_{b_i})$$

donde: $x^T V_i x = \Sigma x_j^2 \sigma^2_{a_{ij}}$

Luego (*) $P(\Sigma a_{ij} x_j \geqslant b_i) \geqslant \alpha_i$ después de algún trabajo algebraico se llega a:

(*) es cierto si y solo si

$$\frac{\Sigma m_{a_{ij}} x_j - m_{b_i}}{(x' V_i x + \sigma^2_{b_i})^{1/2}} \geqslant Z_\alpha$$

Lo que nos lleva a la forma determinística.

$$\min c^T x$$

$$\text{sujeto a : } \Sigma a_{ij} x_j - Z_\alpha (x' V_i x + \sigma_{b_i}^2)^{1/2} \geq m_{b_i}$$

$$x \geq o$$

este problema es no-lineal.

iv) Los costos aleatorios y el resto de los parámetros constantes.

Supuesto:

$$c_j \sim N(m_{c_j}, \sigma_{c_j}^2)$$

Luego :

$$c^T x \sim N(\Sigma m_{c_j} x_j , x' V_{c_j} x)$$

donde :

$$x' V_c x = \Sigma x_j^2 \sigma_{c_j}^2 .$$

El problema se formula:

$$\min \mu$$

$$\text{sujeto a : } P(c^T x \leq \mu) \geq \alpha$$

$$A x \leq b$$

$$x \geq o$$

que se puede expresar después de algunos pasos en:

$$\min \Sigma m_{c_j} x_j + Z_\alpha \sqrt{x' V_c x}$$

$$\text{sujeto a : } Ax \leq b$$

$$x \geq o$$

que es un problema de programación no-lineal.

v) Costos e insumos disponibles aleatorios y el resto de los parámetros constantes.

Supuestos: $c_j \sim N(m_{c_j}, \sigma^2_{c_j})$

$$b_i \sim N(m_{b_i}, \sigma^2_{b_i})$$

y después de algunos pasos se obtiene el siguiente problema:

$$\min \quad \Sigma m_{c_j} x_j + Z_\alpha (x' V_c x)$$

$$\text{sujeto a : } \Sigma a_{ij} x_j \geqslant m_{b_i} + Z_{\alpha_i} \sigma^2_{b_i}$$

$$x \geqslant o$$

problema de programación no-lineal.

La situación en que todos los parámetros son aleatorios es dejada al lector.

RESUMEN.

Hemos visto que la búsqueda de una formulación determinística de un problema de programación lineal en que los parámetros tienen comportamiento aleatorio no siempre conduce a un problema de la misma especie. El camino que aquí se buscó nos condujo a formas en que la varianza de los elementos aleatorios juega un papel crucial. La situación ideal de la programación lineal es que los parámetros no sean variables aleatorias lo que conduce a tener control exacto sobre su determinación.

El cuidado que se tenga en la etapa de determinación del caracter de los parámetros nos ayudará a decidir sobre el tipo de problema que se está resolviendo, lo que indudablemente nos conducirá a resultados que no causarán una sorpresa posterior.

En teoría de la programación lineal se han desarrollado técnicas que analizan en parte esta situación. Lo que se llama análisis de sensibilidad de la solución - ella no nos da una medición del riesgo que se corre al tomar una decisión.

BIBLIOGRAFIA.

1. PETER KALL.: "Stochastic Linear Programming".

2. R.C. PFAFFENBERGER.: "Mathematical Programming for Economics and Bussiness".

3. W.T.ZIEMBA : "Stochastic Programs with simple recurse".

4. PAUL LOAMBA-EFRAIM TURBAN : "Applied Programming for Management".