LA EVALUACION ESTADISTICA DE RESERVAS MINERALES

PATRICIO A. ROJAS M. (*)

RESUMEN.

Los profesionales relacionados con la minería, saben que existen muchos métodos de evaluación de reservas de minerales y se desea que el método de evaluación sea lo más exacto posible, es decir, que el error cometido en la estimación de las reservas sea el más pequeño posible, sin embargo, a pesar de que se está conciente de este problema relacionado con el error de estimación, la mayoría de los métodos conocidos de evaluación de reservas no considera este problema.

En este trabajo, se presenta un método estadístico de evaluación de reservas, con varios anexos que pretenden hacer un artículo autocontenido, para comprender la esencia de un método de evaluación que adolece de entregar un error de estimación, pero que entrega todos los elementos básicos de un método de evaluación.

Nuestra intención es, en un trabajo posterior, abordar justamente el mismo problema, pero considerando el error de estimación calculado con la técnica geoestadística conocida como Krigeage.

(*) Master en Estadística Matemática

Profesor Departamento Matemática U. del Norte.

ALGUNAS DEFINICIONES.

RECURSO.

Es una masa mineralizada de tonelaje T_o geológicamente bien definida, y de ley media m_o determinada por un muestreo homogéneo y representativo

YACIMIENTO.

Concebido como una masa mineralizada susceptible de ser explotada económicamente. Este concepto está usado con criterios técnicos (métodos de explotación, de tratamiento, etc.) y con criterios económicos (costos, valor de mercado, etc.).

RESERVAS DE UN YACIMIENTO.

Se definen en función de parámetros técnicos y económicos.

LEY DE CORTE. (m_c)

Valor mínimo de la ley para la explotabilidad de un block bajo esta ley de corte, un block no debe explotarse y si se explota, se le considera estéril. Esta ley de corte se define en función de parámetros tales como: precio de costo, dimensiones de la unidad de explotación, valor del metal, nivel de inversiones y otros de menor importancia.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LA EVALUACION ESTADISTICA DE RESERVAS.

Supongamos que nuestros recursos T_o (tonelaje) y m_o (ley media) han sido inspeccionados mediante un muestreo homogéneo y representativo (muestras de igual forma y volumen, distribuidas regularmente en nuestra masa mineralizada).

En realidad, la representatividad de un muestreo es algo difícil de determinar, ya que un muestreo es representativo, si la distribución de frecuencias de las muestras

es igual a la distribución de frecuencias real que sólo puede ser conocida al explotar todo el yacimiento.

A estas muestras se le hace un tratamiento estadístico, obteniendo histogramas y distribuciones de frecuencias, con el propósito de compararlos con una curva de referencia (distribución teórica), y de este modo determinar sus parámetros: Ley media y varianza.

Las distribuciones teóricas a las cuales se ajustan, por lo general, las leyes de un yacimiento son la lognormal y la normal (Anexo 1).

El proceso de ajuste de la distribución obtenida a una distribución teórica se hace mediante ajustes analíticos y gráficos (Anexo 2).

Una vez determinada la curva teórica a que se ajustan las muestras, en virtud del teorema de permanencia de las distribuciones enunciado por G. Matheron podemos afirmar que blocks de cualquier tamaño, dentro de ese yacimiento, seguirán la misma distribución (obviamente que con distintos parámetros).

De acuerdo con el teorema anterior, podemos determinar la distribución de los blocks (de un tamaño definido por el método de explotación elegido) dentro del yacimiento.

Para definir la distribución es preciso conocer sus dos primeros momentos. El momento de 1er. orden (μ_b) o ley media de los blocks dentro del yacimiento. Este valor permanece constante para cualquier tamaño de los blocks y vale μ_0 . El momento de 2do. orden (V_b) o varianza de los blocks dentro del yacimiento V_b es evidentemente diferente para distintos tamaños de los blocks y su determinación se hace de un modo indirecto, usando el teorema de Krige. (Anexo 3).

Finalmente, conociendo el variograma $\gamma(h)$ (Anexo 4) dado por la siguiente expresión

$$\gamma(h) = 1/2 E \{ [f(x) - f(x+h)]^2 \}$$

que representa la correlación espacial que existe entre dos muestras separadas una distancia h , podemos calcular las varianzas que intervienen en el teorema de Krige.

CASO PRACTICO.

1. Consideremos un yacimiento de cobre diseminado, con 12.000 muestras provenientes de sondeos. Hecho el tratamiento estadístico, se ve que ajustan los datos a una log normal.

El recurso queda definido por los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} T_o &= 100 \times 10^6 \text{ (Ton)} \\ m_o &= 1.35\% \\ S_{lg}^2 &= 1.8787 \text{ (varianza de las muestras)} \end{aligned}$$

El variograma resultante (Figura 1), se ajusta a un modelo de Matheron con meseta $C = 1,88$ (que corresponde a la varianza de las muestras) y un alcance $a = 20$ metros (que corresponde a la zona de influencia de una muestra).

Se desea estimar las reservas para una posible explotación por blocks de $12' \times 12' \times 12'$ (sub level caving), por blocks de $50' \times 50' \times 50'$ (sub level stoping), por blocks de $50' \times 50' \times 100'$.

La varianza de una muestra en un block de $\ell \times h \times h$, está dado por la relación

$$V_b(\ell, h, h) = C - F(\ell, h, h)$$

Donde $F(\ell, h, h)$ es una función auxiliar que indica el valor medio del variograma, cuando dos puntos recorren independientemente el block de dimensiones $\ell \times h \times h$ (Figura 2)

Existe un programa de computador denominado Ton-Ley que requiere como entrada la Ley Media m_o y cada V_b y calcula las curvas tonelaje/ley de corte, ley de corte/ley media y tonelaje/ley media.

Figura 2.

(Tomado de David, M. 1977)

Las varianzas de los bloques se calculan de la siguiente forma:

BLOCK	$\frac{\ell}{a}$	$\frac{h}{a}$	$\frac{1}{C} F(\frac{\ell}{a}, \frac{h}{a}, \frac{h}{a})$	V_b
12x12x12	$\frac{12}{20} = 0.6$	$\frac{12}{20} = 0.6$	0.55	0.8460
30x50x50	$\frac{30}{20} = 1.5$	$\frac{50}{20} = 2.5$	0.963	0.0696
50x50x50	$\frac{50}{20} = 2.5$	$\frac{50}{20} = 2.5$	0.973	0.0470
50x50x100	$\frac{50}{20} = 2.5$	$\frac{100}{20} = 5$	0.9925	0.0141

Luego con el programa de computador Ton-Ley y el valor $m_0=1.35$ y cada V_b se calculan las curvas Tonelaje/Ley de corte (Figura 3), Ley de corte/Ley media (Figura 4), Tonelaje/ley Media (Figura 5).

Basado en los gráficos anteriores se pueden construir tablas como la que se muestra a continuación (para explotación por blocks de 30'x50'x50') donde para una Ley de corte se puede usar la Ley Media de cada block y el tonelaje total del recurso. Tablas similares se pueden obtener para blocks de otras dimensiones.

BLOCK DE 30' x 50' x 50'

Ley de Corte (%Cu)	Ley Media (%Cu)	Tonelaje ($\times 10^6$ Ton)
0.10	1.35	100.00
0.20	1.35	100.00
0.30	1.35	100.00
0.40	1.35	100.00
0.50	1.35	100.00
0.60	1.35	100.00

0.70	1.35	99.96
0.80	1.36	99.57
0.90	1.37	97.84
1.00	1.39	92.99
1.10	1.42	83.67
1.20	1.48	70.20
1.30	1.54	54.60
1.40	1.61	39.42
1.50	1.70	26.57
1.60	1.78	16.84
1.70	1.87	10.12
1.80	1.96	5.81
1.90	2.05	3.21
2.00	2.15	1.71
2.10	2.24	0.89
2.20	2.34	0.45
2.30	2.44	0.23
2.40	2.54	0.11
2.50	2.63	0.05
2.60	2.73	0.03
2.70	2.83	0.01
2.80	2.93	0.01

Haciendo uso de estas tablas podemos estimar el tonelaje y la ley media de cada block, para una ley de corte dada. Por ejemplo para una explotación por blocks de 30' x 50' x 50' con una ley de corte $m_c = 1.80$ (% Cu) se tiene una ley media de 1.96 (% Cu) y c un tonelaje estimado de 5.81×10^6 (Ton.) .

CONCLUSIONES.

Este método permite obtener las estimaciones de tonelaje de mineral y ley media para una ley de cobre dada, pero tiene dos grandes limitaciones.

- a) No proporciona el error cometido en la estimación.
- b) No proporciona información sobre la ubicación física de los blocks y sus leyes.

Ambos problemas se pueden resolver en forma muy exacta con la técnica geoestadística del Krigeage.

ANEXO 1. LAS DISTRIBUCIONES NORMAL Y LOG NORMAL.

DISTRIBUCION NORMAL.

Es el mejor ejemplo de una distribución de probabilidad continua, se le llama también curva normal o distribución de Gauss y está definida por la ecuación

$$Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (X - \mu)^2 / \sigma^2} \quad (*)$$

donde μ es la media
 σ es la desviación típica

El área total limitada por la curva y el eje X es igual a uno (1), de modo que el área bajo la curva limitada por el eje X, las ordenadas $X = a$ y $X = b$ ($a < b$), representa la probabilidad de que X se encuentre entre a y b y se denota que $P(a < X < b)$ y se calcula como

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-1/2 (x-\mu)/\sigma^2} dx$$

La variable X se expresa en unidades de desviación mediante la fórmula.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

y en este caso la ecuación (*) queda

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 z^2}$$

llamada forma tipificada de la normal.

A continuación se muestra un gráfico de la curva normal tipificada. En este gráfico se indican las áreas comprendidas entre $-1 < z < 1$ $-2 < z < 2$ y $-3 < z < 3$, que equiva-

len respectivamente al 68,27%, 95,45% y 99,73% del área total. Existen tablas que permiten calcular otras áreas bajo la curva.

DISTRIBUCION LOG NORMAL.

Es un ejemplo de las llamadas distribuciones normales transformadas, se les llama también distribución logarítmico-normal y está definida por la ecuación

$$Y = \frac{1}{X \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (\log X - \mu)^2 / \sigma^2} (**)$$

donde μ es la media

σ es la desviación típica.

El área total limitada por la curva y el eje X es igual a uno (1), de modo que el área bajo la curva limitada por el eje X, las ordenadas $X = a$ y $X = b$ ($a < b$) representan la probabilidad de que X se encuentre entre a y b y se denota por $P(a < X < b)$ y se calcula como

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b \frac{1}{X} e^{-1/2 (\log x - \mu)^2 / \sigma^2} dx$$

La variable X se expresa en unidades de desviación mediante la fórmula

$$Z = \frac{\log x - \mu}{\sigma}$$

y en este caso la ecuación (**) queda

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 Z^2}$$

llamada forma tipificada de la log normal.

A continuación se muestra un gráfico de la curva log normal tipificada para $\mu = 0.46$ y $\sigma = 1$.

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS.

Los parámetros μ y σ^2 se estiman según lo indicado en el siguiente cuadro

PARAMETRO	DISTRIBUCION NORMAL	DISTRIBUCION LOG NORMAL
μ	$\bar{X}_N = \frac{\sum x_i}{n}$	$\bar{X}_{LN} = \frac{\sum \log x_i}{n}$
2	$S_N^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_N)^2}{n-1}$	$S_{LN}^2 = \frac{\sum \log(x_i - \bar{x}_{LN})^2}{n-1}$

ANEXO 2. AJUSTE A CURVAS TEORICAS.

En general se trata de probar en que grado los datos observados se ajustan a un modelo probabilístico (curva teórica).

Para las leyes normal y log normal, se puede hacer un ajuste gráfico, en el caso de la normal graficando los puntos sobre papel aritmético Gaussiano, si los datos ajustan a la normal, en este papel debe producirse una recta, lo cual se puede verificar, por una prueba de regresión lineal.

Para la ley log normal, graficando los puntos sobre papel logarítmico gaussiano, si los datos ajustan a una log normal, en este papel debe producirse una recta, lo cual se puede verificar por una prueba de regresión lineal.

También podemos hacer un ajuste analítico del siguiente modo: se considera la ley teórica que más se aproxime visualmente al histograma de datos. Generalmente la curva teórica no ajusta exactamente a los datos, por lo cual es necesario realizar una prueba de hipótesis, que permita discernir entre las dos alternativas siguientes:

- Las diferencias se deben al azar, es decir, las fluctuaciones aleatorias son las responsables de las divergencias entre el modelo teórico y el modelo observado y por lo tanto el modelo considerado es el adecuado.

- Las diferencias se deben a que el modelo teórico usado es inadecuado, es decir, efectivamente los datos no ajustan al modelo teórico considerado y deberá considerarse otro modelo.

El detalle de estas pruebas de hipótesis, pueden verse en cualquier texto de estadística matemática.

ANEXO 3. TEOREMA DE KRIGE.

La varianza de dispersión de las leyes de las muestras en el yacimiento G es igual a la varianza de dispersión de las leyes de estas muestras en un panel P más la varianza de dispersión de las leyes de estos paneles P en el yacimiento G.

Si usamos la siguiente notación

$D^2 (1/G) =$ Varianza de dispersión de las leyes de las muestras en el yacimiento.

$D^2 (1/P) =$ Varianza de dispersión de las leyes de las muestras en un panel P.

$D^2 (P/G) =$ Varianza de dispersión de las leyes de los Paneles P en el yacimiento G.

La relación de este teorema es:

$$D^2 (1/G) = D^2 (1/P) + D^2 (P/G).$$

$D^2 (1/G)$ es conocida y es igual a la varianza estadística de las leyes de las muestras en el yacimiento (S^2_{1G}).

$D^2 (1/P)$ se puede calcular en base a ábacos geoestadísticos, generados por la función auxiliar $F (l, h, h)$ siendo l , h y h las dimensiones de los paneles de explotación (S^2_{1P}).

La función auxiliar $F (l, h, h)$ es el valor medio del variograma, cuando dos puntos recorren independientemente el panel de dimensiones l , h y h .

De modo que podemos anotar la relación de Krigé como:

$$D^2 (P/G) = S^2_{1G} - S^2_{1P}$$

ANEXO 4. EL VARIOGRAMA.

El variograma es una función que representa el grado de continuidad de la mineralización y está dado por la expresión

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[f(x+h) - f(x)]^2\}$$

es decir, el variograma es el valor esperado de las discrepancias que existen entre valores distantes una cierta distancia h . El variograma se determina en puntos que son múltiplos de h , es decir, h , $2h$, $3h$, etc..

Se entiende que el variograma, o también llamada Ley de Dispersión, depende en principio del campo geométrico sobre el cual ha sido definido.

Al calcular el variograma en otro campo geométrico, se obtendrá con seguridad un variograma distinto. Sin embargo, existe una idea intuitiva de que en una misma formación o en una misma "Regionalización", producto de un mismo fenómeno geológico, debe haber algo intrínseco, o mejor dicho, independiente del campo geométrico, que expresa el hecho de que el variograma es "intrínseco" a la "regionalización", y por lo tanto, en una misma "regionalización" los variogramas calculados en distintos campos geométricos, coinciden. Experimentalmente esto se puede constatar en el variograma en el espacio.

Existen técnicas de cálculo del variograma en distintas direcciones, que son posibles de encontrar en programas de computador.

BIBLIOGRAFIA.

- CALOT, GERARD : "Cours de Statistique Descriptive".
Ed. Dunod, Paris 1969.
- CRAMER, HARALD: "Elementos de la Teoría de Probabilidades".
Ed. Aguilar, Madrid 1960.
- CRAMER, HARALD: "Métodos Matemáticos de Estadística".
Ed. Aguilar, Madrid 1960.
- DAVID M. : "Geostatistical Ore Reserve Estimation".
Elsevier Scientific Publishing Company.
New York 1977.
- DIDYK M., MARKO
TULCANAZA N., EDMUNDO: " La Determinación de Errores en el
Cálculo de Reservas". Revista Minerales.
Vol. XXV N° 111. Sept. 1970.
- DIDYK M., MARKO: "La Evaluación de Reservas Por Métodos Estadísticos". Revista Minerales. Vol. XXV.
N° 109. Marzo 1970.
- JOURNEL A. : "Presentación Audiovisual de la Geoestadística". Fointanebleau, Enero 1974.
- MODD ALEXANDER M.
GRAYBILL FRANKLIN A.: " Introducción a la Teoría de la Estadística". Ed. Aguilar. Madrid 1963.
- SPIEGEL, MURRAY R.: "Estadística Mc Graw-Hill, Colombia.
1969.