METODO DE SOBRE RELAJACION ACELERADA

OSCAR ROJO JERALDO

El propósito del presente trabajo es presentar un método iterativo, de reciente aparición en la literatura, para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este método es llamado de sobre-relajación acelerada (AOR). Los métodos iterativos de Jacobi, de Gauss-Seidel, de sobre-relajación simultánea (JOR) y de sobre-relajación sucesiva (SOR) pueden ser derivados como caso especiales de este nuevo método.

1. NOTACIONES Y DERIVACION DEL METODO.

$$\text{Sea } Ax = b \quad (1.1)$$

un sistema de ecuaciones donde la matriz A de coeficientes es invertible con elementos no nulos en la diagonal. Escribimos

$$A = D - E - F, \quad (1.2)$$

donde D es una matriz diagonal y E y F matrices estrictamen-

te bajo y sobre triangular respectivamente. Consideramos un esquema iterativo de la forma.

$$(D + \alpha_1 E) x^{(k+1)} = (\alpha_2 D + \alpha_3 E + \alpha_4 F) x^{(k)} + \alpha_5 b. \quad (1.3)$$

Las relaciones

$$1 - \alpha_2 = \alpha_5, \quad \alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_5, \quad \alpha_4 = \alpha_5 \neq 0$$

Garantizan la consistencia del esquema (1.3) con el sistema (1.1.). Estas relaciones dan origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es claramente de rango 3. Por lo tanto, tiene una solución que depende de dos parámetros, $\alpha_5 = \omega \neq 0$ y $\alpha_1 = -r$, dada por

$$\alpha_2 = 1 - \omega, \quad \alpha_3 = \omega - r, \quad \alpha_4 = \omega.$$

Con estos resultados el esquema (1.3) puede escribirse como

$$(D - rE) x^{(k+1)} = [(1 - \omega) D + (\omega - r) E + \omega F] x^{(k)} + \omega b.$$

Multiplicando por D^{-1} , resulta

$$(I - rL) x^{(k+1)} = [(1 - \omega) I + (\omega - r) L + \omega F] x^{(k)} + \omega D^{-1} b,$$

donde $L = D^{-1} E$ $U = D^{-1} F$.

Dado que la matriz $(I - rL)$ es invertible podemos escribir

$$x^{(k+1)} = (I - rL)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U] x^{(k)} + \omega (I - rL)^{-1} D^{-1} b$$

El método iterativo dado por esta última expresión es llamado método de sobrerelajación acelerada (AOR), que designaremos en lo sucesivo con la notación $M_{r\omega}$.

Vemos que es un método iterativo estacionario y, en consecuencia, será convergente si y sólo si el radio espectral de su matriz de iteración es menor que uno, es decir, si y sólo si $\rho(B_{r\omega}) < 1$, donde

$$B_{r\omega} = (I - rL)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U]$$

Finalizamos esta sección observando que los métodos iterativos estacionarios más conocidos pueden ser obtenidos como casos particulares de AOR. En efecto, $M_{0,1}$ es el Método de Jacobi, $M_{1,1}$ es el método de Gauss-Seidel, $M_{0,\omega}$ es el método de relajación simultánea (JOR) y $M_{\omega\omega}$ es el método de relajación sucesiva (SOR).

2. TEOREMAS DE CONVERGENCIA PARA MATRICES DIAGONALMENTE DOMINANTES.

Comenzamos esta sección recordando que una matriz A irreducible diagonalmente dominante, es decir, A irreducible y

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i$$

con desigualdad estricta para al menos un valor de i , es una matriz invertible y sus elementos en la diagonal son distintos de cero. El siguiente teorema nos dice que si A es una tal matriz entonces el método $M_{r\omega}$ es convergente para $0 < r < 1$ y $0 < \omega < 1$.

Teorema 2.1.

Si A es irreducible diagonalmente dominante, entonces, el método $M_{r\omega}$ es convergente para $0 \leq r \leq 1$ y $0 < \omega \leq 1$.

Demostración:

Sea λ un autovalor de $B_{r\omega}$. Entonces,

$$\det (B_{r\omega} - \lambda I) = 0$$

Pero,

$$(I - rL) (B_{r\omega} - \lambda I) = (1 - \omega - \lambda)I + (r(\lambda - 1) + \omega)L + \omega U.$$

Supongamos que $|\lambda| \geq 1$. Entonces, $1 - \omega - \lambda \neq 0$. Podemos así escribir

$$(I - rL) (B_{r\omega} - \lambda I) = (1 - \omega - \lambda) Q, \text{ donde}$$

$$Q = I - \frac{r(\lambda-1)+\omega}{\lambda-1+\omega} L - \frac{\omega}{\lambda-1\omega} U \quad (2.1)$$

$$\text{Luego, } \det (B_{r\omega} - \lambda I) = 0 \quad \text{si y sólo si } \det Q = 0$$

$$\text{Como } \det (B_{r\omega} - \lambda I) = 0, \quad \text{resulta } \det Q = 0$$

Afirmamos que $r(\lambda - 1) + \omega \neq 0$. En efecto, $r(\lambda - 1) + \omega = 0$ implica que Q es sobre-triangular con elementos igual a 1 en la diagonal y, en tal caso, $\det Q = 1$, lo que contradice $\det Q = 0$

Queda así probado que $r(\lambda - 1) + \omega \neq 0$. Como además $\omega \neq 0$, la irreducibilidad de A implica que Q es también una matriz irreducible. Deseamos ahora probar que los coeficientes en (2.1) son ambos, en módulo, menores que 1; es decir, que

$$|\lambda - 1 + \omega| \geq |r(\lambda - 1) + \omega|, \quad |\lambda - 1 + \omega| \geq |\omega| \quad (2.2)$$

Podemos escribir $\lambda^{-1} = Re^{i\theta}$ con $0 < R = |\lambda^{-1}| \leq 1$

La primera de las desigualdades anteriores es equivalente a

$(1 - r^2) + (1 - r^2)R^2 - (1 - r^2)2R\cos\theta + (1 - r)R\omega\cos\theta - (1 - r)2R^2\omega \geq 0$,
con igualdad para $r = 1$. Entonces, para $r < 1$, esta desigualdad es equivalente a

$$(1 + r) + (1 + r)R^2 - (1 + r - \omega)2R\cos\theta - 2R^2\omega \geq 0 \quad (2.3)$$

Pero, $1 + r - \omega = (1 - \omega) + r \geq 0$. Luego, la desigualdad (2.3) se verifica si se cumple para $\cos\theta = 1$,

$$(1 + r) + (1 + r)R^2 - (1 + r - \omega)2R - 2R^2\omega \geq 0$$

De donde,

$$(1 - R)[(1 + r)(1 - R) + R\omega] \geq 0$$

Desigualdad que claramente se verifica dado que $R \leq 1$. Así entonces (2.3) es válida, de donde a su vez se implica la validez de la primera desigualdad de (2.2). La segunda de estas desigualdades es equivalente a

$$(1 + R^2) - 2R(1 - \omega) \cos \theta - 2R^2 \omega \geq 0 \quad (2.4)$$

Dado que $\omega \leq 1$, esta desigualdad se satisface si se cumple para $\cos \theta = 1$, es decir, si

$$(1 - R) [(1 - R) + 2R\omega] \geq 0;$$

desigualdad claramente válida dado que $R \leq 1$. Quedan de este modo probadas las dos desigualdades en (2.2). Con esto podemos concluir que la matriz Q en (2.1) es diagonalmente dominante con desigualdad estricta para al menos una fila. Como además anteriormente concluimos que esta matriz es irreducible, resulta que ella es invertible y, por lo tanto, $\det Q \neq 0$. Resultado que está en contradicción con $\det Q = 0$. En consecuencia, $|\lambda| < 1$. Así resulta, $\rho(B_{r\omega}) < 1$, y el teorema queda demostrado.

Teorema 2.2.

Si A es una matriz invertible con $a_{ii} \neq 0$ para todo i , entonces

$$\min_i \frac{|1 - \omega| - |\omega - r| l_i - |\omega| u_i}{1 + |r| l_i} \leq \rho(B_{r\omega}) \leq \max_i \frac{|\omega - r| l_i + |\omega| u_i + |1 - \omega|}{1 - |r| l_i},$$

donde r es escogido de modo que $|r| l_i < 1, \forall i$; y donde l_i y u_i son respectivamente las sumas de los módulos de los elementos de la i -ésima fila de L y U .

Demostración:

Supongamos primeramente que

$$|\lambda| = \rho(B_{\omega r}) > \max_i \frac{|\omega - r| l_i + |\omega| u_i + |1 - \omega|}{1 - |r| l_i}$$

donde λ es obviamente un autovalor de $B_{\omega r}$. Entonces, dado que $|r| l_i < 1$, tenemos

$$|\lambda| - |\lambda| |r| l_i > |\omega - r| l_i + |\omega| u_i + |1 - \omega|, \forall i.$$

De donde,

$$|\lambda| - |1 - \omega| > |\omega - r| l_i + |\lambda r| l_i + |\omega| u_i, \forall i.$$

Pero, $|\lambda - 1 + \omega| \geq |\lambda| - |1 - \omega|$ y

$$|\omega - r| l_i + |\lambda r| l_i \geq |\omega - r + \lambda r| l_i.$$

Luego,

$$|\lambda - 1 + \omega| > |r(\lambda - 1) + \omega| l_i + |\omega| u_i, \forall i \quad (2.5)$$

Supongamos ahora que

$$|\lambda| = \rho(B_{\omega r}) < \min \frac{|1 - \omega| - |\omega - r| l_i - |\omega| u_i}{1 + |r| l_i}$$

Entonces,

$$|\lambda| + |\lambda| |r| l_i < |1 - \omega| - |\omega - r| l_i - |\omega| u_i, \forall i$$

De donde,

$$|1 - \omega| - |\lambda| > |\omega - r| l_i + |\lambda r| l_i + |\omega| u_i, \forall i$$

$$\begin{aligned} \text{Pero,} \quad |\lambda - 1 + \omega| &= |1 - \omega - \lambda| \geq |1 - \omega| - |\lambda| \\ |\omega - r|l_i + |\lambda r| l_i &\geq |\omega - r + \lambda r| l_i \end{aligned}$$

Luego,

$$|\lambda - 1 + \omega| > |r(\lambda - 1) + \omega| l_i + |\omega| u_i, \forall i.$$

Hemos obtenido nuevamente la desigualdad (2.5). Vemos de esta desigualdad que $\lambda - 1 + \omega \neq 0$, y que la matriz Q dada en (2.1) es estrictamente diagonalmente dominante y, por lo tanto, $\det Q \neq 0$. Pero, $\det Q = 0$ dado que λ es un autovector de $B_{r\omega}$. Queda de este modo probado el teorema.

Colorario.

Los radios espectrales de las matrices de iteración de los métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel, de sobre-relajación simultánea y de sobre-relajación sucesiva están respectivamente acotados por

$$\text{i)} \quad \rho(B_{0,1}) \leq \max_i (l_i + u_i)$$

$$\text{ii)} \quad \rho(B_{1,1}) \leq \max_i \frac{u_i}{1-l_i} \text{ si } l_i < 1, \forall i$$

$$\text{iii)} \quad \rho(B_{0,\omega}) \leq \max_i (|\omega| (l_i + u_i) + |1 - \omega|)$$

$$\text{iv)} \quad \rho(B_{\omega,\omega}) \leq \max_i \frac{|\omega|u_i + |1-\omega|}{1-|\omega|l_i} \text{ si } |\omega| l_i < 1, \forall i$$

Los siguientes teoremas corresponden al caso en el cual la matriz A de coeficientes es estrictamente diagonalmente dominante, es decir,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{para todo } i.$$

En tal caso, la matriz es invertible y $a_{ii} \neq 0$ para todo i .

Teorema 2.3.

Si A es estrictamente diagonalmente dominante y si $\omega \geq r \geq 0$, entonces el método $M_{r\omega}$ es convergente si

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \max_1 (l_1 + u_i)}$$

Demostración:

Del teorema (2.2) tenemos

$$\rho(B_{r\omega}) \leq \frac{|\omega-r|l_i + |\omega|u_i + |1-\omega|}{1-|r|l_i}, \quad \forall i \quad (2.6)$$

Para $0 \leq r \leq \omega \leq 1$,

$$\rho(B_{r\omega}) \leq \frac{\omega(l_i + \omega_i - 1) + (1 - rl_i)}{1 - rl_i} = 1 + \omega \frac{(l_i + u_i - 1)}{1 - rl_i} < 1.$$

Ahora si $\omega \geq r \geq 0$ y $\omega > 1$, basta probar que el segundo miembro de (2.6) es menos que 1, es decir,

$$\frac{\omega(l_i + u_i + 1) - 1 - rl_1}{1 - rl_1} < 1.$$

Resultando que se sigue inmediatamente si

$$\omega < \frac{2}{1 + \max(l_i + u_i)}$$

Definición 2.1.

Dado el esquema iterativo estacionario,

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad (2.7)$$

el siguiente método iterativo.

$$x^{(k+1)} = [(1-s)I + sB]x^{(k)} + sc \quad (2.8)$$

es llamado el método extrapolado de (2.7)

En particular, excepto para el caso $r = 0$, el método AOR es el método extrapolado del método SOR con parámetro de

sobre-relajación r y parámetro de extrapolación $\frac{\omega}{r}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 x^{(k+1)} &= \left[\left(1 - \frac{\omega}{r}\right) I + \frac{\omega}{r} (I - rL)^{-1} (1 - r) I + r \cup \right] x^{(k)} + \frac{\omega}{r} r (I - rL)^{-1} D^{-1} b \\
 &= (I - rL)^{-1} \left[\left(1 - \frac{\omega}{r}\right) I + \left(\frac{\omega}{r} - \omega\right) I + \omega \cup - rL + \omega L \right] x^{(k)} + \omega (I - rL)^{-1} D^{-1} b \\
 &= (I - rL)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega \cup] x^{(k)} + \omega (I - rL)^{-1} D^{-1} b.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$B_{r\omega} = \left(1 - \frac{\omega}{r}\right) I + \frac{\omega}{r} B_{rr}, \quad r \neq 0$$

Por lo tanto, si ν es un autovalor de B_{rr} , $r \neq 0$, entonces

$$\lambda = \left(1 - \frac{\omega}{r}\right) + \frac{\omega}{r} \nu$$

es un autovalor de $B_{r\omega}$. En general, si ν es un autovalor de B en (2.7).

$$\lambda = (1 - 2) + s\nu$$

es un autovalor de la matriz de iteración de (2.8).

Teorema 2.4. (Teorema de extrapalación)

Si el esquema (2.7) es convergente y si $0 < s < \frac{2}{1 + \rho(B)}$ entonces el esquema (2.8) es convergente.

Demostración:

Sabemos que $\lambda = (1-s) + sv$, donde v es un autovalor de B y λ un autovalor de $(1-s)I + sB$. Supongamos $0 < s \leq 1$. En este caso,

$$|\lambda| \leq 1 - s + s|v| < 1 - s + s = 1, \text{ pues } |v| \leq \rho(B) < 1.$$

Sea ahora $1 < s < \frac{2}{1 + \rho(B)}$. Tenemos

$$|\lambda| \leq s - 1 + s|v| = s(1 + |v|) - 1 < \frac{2}{1 + \rho(B)} (1 + \rho(B)) - 1 = 1,$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

Teorema 2.5.

Si la matriz A de coeficientes es estrictamente diagonalmente dominante y si $0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(B_{0,1})}$ entonces $\rho(B_{0,\omega}) < 1$.

Demostración :

Observamos primeramente que el método de sobre-relajación simultánea es el método extrapolado del método de Jacobi. En efecto,

$$x^{(k+1)} = [(1 - \omega)I + \omega(L + U)] x^{(k)} + \omega B^{-1}b, \text{ con } \omega \text{ como}$$

parámetro de extrapolación. Como A es estrictamente diagonalmente dominante, se sigue

$$l_i + u_i < 1, \forall i$$

Así entonces, $\rho(B_{0,1}) < 1$. El resultado sigue ahora del teorema de extrapolación.

Teorema 2.6.

Si la matriz A de coeficientes es estrictamente diagonalmente dominante y si $0 < r < \frac{2}{1 + \max_i(l_i + u_i)}$

y $0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(B_{r,r})}$ entonces $\rho(B_{r,\omega}) < 1$.

Demostración :

De $l_i + u_i < 1, \forall i$, obtenemos

$$r(l_i + u_i) + 1 < 1 + r$$

Luego, para $0 < r \leq 1$, resulta

$$|r| u_i + |1-r| < 1 - |r| l_i, \forall i$$

De donde,

$$\max_i \frac{|r|u_i + |1-r|}{1-|r|l_i} < 1$$

Supongamos ahora $1 < r < \frac{2}{1 + \max_i (l_i + u_i)}$

Entonces, en este caso,

$$r(l_i + u_i) + r < 2, \forall i$$

De donde,

$$ru_i + r - 1 < 1 - rl_i, \forall i$$

Nuevamente,

$$\max_i \frac{|r|u_i + |1-r|}{1-|r|l_i}$$

Por lo tanto, después de usar el teorema 2.2, $\rho(B_{r,r}) < 1$. El teorema sigue ahora del teorema de extrapolación.

Teorema 2.7.

Si A es estrictamente diagonalmente dominante, el método SOR converge si

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \max_i (l_i + u_i)}$$

Demostración:

Consecuencia inmediata del teorema 2.3. haciendo
 $r = \omega$

Teorema 2.8.

Si A es irreducible diagonalmente dominante con
 $l_k + u_k = 1$ para cierto k entonces

$$\rho(B_{\omega r}) < \max_i \frac{|\omega - r|l_i + |\omega|u_i|1 - \omega|}{1 - |r|l_i} \quad (2.9)$$

para $0 < r \leq \omega$, donde r es escogido de modo que $rl_i < 1$.

Demostración:

De $\rho(B_{\omega r}) \geq \max_i \frac{|\omega - r|l_i + |\omega|u_i|1 - \omega|}{1 - |r|l_i}$ obtenemos

$$|\lambda - 1 + \omega| \geq |\lambda| - |1 - \omega| \geq |\omega - r|l_i + |\lambda r|l_i + |\omega|u_i \geq |r(\lambda - 1) + \omega|l_i + |\omega|u_i,$$

para todo i . De estas desigualdades y dado que A es irreducible concluimos que $\lambda - 1 + \omega \neq 0$ y que la matriz Q de (2.1) es irreducible pues $\omega \neq 0$ y $|r(\lambda - 1) + \omega| \neq 0$. Si $r(\lambda - 1) + \omega = 0$ entonces $\det Q = 1$, lo que contradice $\det Q = 0$. Si

$|\lambda - 1 + \omega| > |r(\lambda - 1) + \omega|l_i + |\omega|u_i$ para cierto i , entonces Q resulta ser irreducible diagonalmente dominante, y así, $\det Q \neq 0$. Con lo cual el teorema quedaría probado.

Supongamos entonces

$$|\lambda - 1 + \omega| = |r(\lambda - 1) + \omega| l_i + |\omega| u_i, \quad \forall i.$$

Esto junto con las desigualdades dadas anteriormente implica que

$$|\lambda| - |1 - \omega| = |\omega - r| l_i + |\lambda r| l_i + |\omega| u_i, \quad \forall i \quad (2.10)$$

Pero, $0 < r \leq \omega$. Si $\omega \leq 1$, entonces

$$|\lambda|(1 - r l_i) = \omega(l_i + u_i - 1) + 1 - r l_i, \quad \forall i \quad (2.11)$$

En particular

$$|\lambda|(1 - r l_k) = \omega(l_k + u_k - 1) + 1 - r l_k = 1 - r l_k$$

Resulta así $|\lambda| = 1$. Reemplazando este resultado en (2.11) obtenemos

$$l_i + u_i = 1, \quad \forall i$$

Consideramos ahora $\omega > 1$. De (2.10) implicamos

$$|\lambda|(1 - r l_i) = \omega(l_i + u_i + 1) - 1 - r l_i, \quad \forall i \quad (2.12)$$

En particular,

$$|\lambda|(1 - r l_k) = \omega(l_k + u_k + 1) - 1 - r l_k = 2(\omega - 1) + 1 - r l_k$$

De donde,

$$|\lambda| = \frac{2(\omega - 1)}{1 - r l_k} + 1 > 1.$$

Reemplazando en (2.12) obtenemos

$$\omega (l_i + u_i + 1) - 1 > 1$$

Tomando límite cuando ω tiende a 1 por la derecha resuelta

$$l_i + u_i \geq 1, \forall i$$

Entonces, tanto para $\omega \leq 1$ como para $\omega > 1$, hemos obtenido resultados que contradicen el hecho de A irreducible diagonalmente dominante. Se sigue así el teorema.

Observación :

Observamos que si A satisface las hipótesis del teorema 2.8 y $0 < r \leq \omega$, entonces el mayor valor de ω para el cual el segundo miembro de 2.9 es menor o igual a 1 es $\omega = 1$. Si A es diagonalmente dominante y no existe k tal que $l_k + u_k = 1$ entonces A es estrictamente diagonalmente dominante, y en tal caso, podemos usar el teorema 2.3.

3. TEOREMAS PARA L-MATRICES Y PARA MATRICES CONSISTENTEMENTE ORDENADAS.

Definición 3.1.

Una matriz A se dice que es una L-matriz si y sólo si

$$a_{ii} > 0, \forall i \quad \text{y} \quad a_{ij} \leq 0, \forall i \neq j.$$

Teorema 3.1.

Si A es una L-matriz y si $0 \leq r \leq \omega \leq 1, \omega \neq 0$, enton-

ces el método $M_{r\omega}$ converge si y sólo si $M_{0,1}$ converge.

Demostración.

Supongamos que el método $M_{0,1}$ es convergente. Supongamos además que $\lambda = \rho(B_{r\omega}) \geq 1$. Se sigue inmediatamente de las hipótesis que

$$(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U \geq 0, \text{ y que}$$

$(I - rL)^{-1} = I + rL + r^2 L^2 + \dots + r^{n-1} L^{n-1} \geq 0$,
donde $n \times n$ es el orden de la matriz A . De este modo tenemos

$$B_{r\omega} = (I - rL)^{-1} [(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U] \geq 0$$

Entonces, λ es un autovalor de la matriz $B_{r\omega}$ y $B_{r\omega} u = \lambda u$ para cierto vector $u \neq 0$.

De donde,

$$[(1 - \omega)I + (\omega - r)L + \omega U] u = \lambda (I - rL) u$$

$$\left(\frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} L + U \right) u = \frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega} u.$$

Es decir, $\frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega}$ es un autovalor de la matriz

$$\frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} L + U. \text{ Luego,}$$

$$\frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega} \leq \rho \left(\frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} L + U \right)$$

Pero,
$$\frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} = 1 + (\lambda - 1) \frac{r}{\omega} \geq 1$$

Luego,

$$0 \leq \frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} L + U \leq \frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} (L + U) = \frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} B_{0,1}$$

Resulta así,

$$\frac{\lambda - 1 + \omega}{\omega} \leq \frac{\omega - r + r\lambda}{\omega} \rho(B_{0,1})$$

De donde, $\rho(B_{0,1}) \geq 1$. Resultado que contradice la hipótesis $\rho(B_{0,1}) < 1$. De modo entonces que la convergencia de $M_{0,1}$ implica la convergencia de $M_{r\omega}$. Recíprocamente, es obvio que la convergencia de $M_{r\omega}$ implica la convergencia de $M_{0,1}$.

Definición 3.2.

Una matriz A se dice consistentemente ordenada ssi para $A = D - E - F$ se tiene que

$\det(\alpha E + \alpha^{-1} F - \beta D)$ es independiente de α para todo $\alpha \neq 0$ y todo β .

Lema 3.1.

Si A es consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall j$ y si μ es un autovalor de $B_{0,1}$ de multiplicidad p , entonces $-\mu$ es también un autovalor de $B_{0,1}$ de multiplicidad p .

Demostración:

Claramente si A es consistentemente ordenada, entonces $D^{-1}A$ es consistentemente ordenada. Sea $c(\lambda)$ el

polinomio característico de $B_{0,1}$. Entonces,

$$c(\lambda) = \det(L + U - \lambda I) = (\lambda - \mu)^p q(\lambda)$$

Como $\det(L + U - \lambda I) = (-1)^n \det(L + U + \lambda I)$, concluimos que $c(\lambda) = (-1)^{n+p} (\lambda + \mu)^p q(-\lambda)$.
Queda así probado el lema 3.1.

Lema 3.2.

Sea A es consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall i$.
Si μ y ν están relacionadas por la ecuación

$$(\nu - 1 + r)^2 = r^2 \mu^2 \nu,$$

entonces μ es un autovalor de $B_{0,1}$ si y sólo si ν es un autovalor de B_{rr}

Demostración:

$$B_{rr} = (I - rL)^{-1} [(1 - r)I + rU]$$

Sea $c(\nu)$ el polinomio característico de B_{rr} .

Entonces,

$$\begin{aligned} c(\nu) &= \det(B_{rr} - \nu I) = \det(I - rL)(B_{rr} - \nu I) = \\ &= \det((1 - r)I + rU - \nu I + r\nu L) = \\ &= \det(r\nu L + rU - (\nu - 1 - r)I) = \\ &= \frac{1}{\mu^n} \det(r\mu\nu L + r\mu U - \mu(\nu - 1 + r)I) = \\ &= \frac{(\nu - 1 + r)^n}{\mu^n} \det\left(\frac{r\mu\nu}{\nu - 1 + r} L + \frac{r\mu}{\nu - 1 + r} U - \mu I\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(v-1+r)^n}{\mu^n} \det(L + U - \mu I) \text{ pues}$$

$$\frac{r^2 \mu^2 v}{(v-1+r)^2} = 1. \text{ Luego, si } d(\mu) \text{ es el polinomio ca-}$$
 racterístico de $B_{0,1}$, tenemos

$$c(v) = \frac{(v-1+r)^n}{\mu^n} d(\mu),$$

suponiendo que $\mu \neq 0$ y $v \neq 0$. Relación esta última de la cual se sigue el lema.

Lema 3.3.

Si β y γ son reales, entonces las dos raíces de la

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$$

son en módulo menores que 1 si y sólo si $|\gamma| < 1$, $|\beta| < 1 + \gamma$

Demostración:

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$$

Entonces, si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ de la relación $\gamma = \lambda_1 \lambda_2$

se sigue $|\gamma| < 1$ y de la relación $\beta = \lambda_1 + \lambda_2$ se sigue $|\beta| < 1 + \gamma$,

Supongamos ahora $|\gamma| < 1$ y $|\beta| < 1 + \gamma$. Si λ es una raíz de la ecuación,

$$|\lambda| < \frac{1}{2} (|\beta| + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}) < \frac{1}{2} (|\beta| + (1 - \gamma)) <$$

$$< \frac{1}{2} (1 + \gamma + 1 - \gamma) = 1, \text{ si } \beta^2 - 4\gamma \geq 0.$$

Si $\beta^2 - 4\gamma < 0$, entonces $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ y claramente se sigue que $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$

Teorema 3.2.

Sea A una matriz consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall i$. Si μ y λ están relacionados por la ecuación

$$(\lambda - 1 + \omega)^2 = \omega \mu^2 [r(\lambda - 1) + \omega],$$

entonces μ es un autovalor de $B_{0,1}$ si y sólo si λ es un autovalor de $B_{r\omega}$.

Demostración:

Recordamos que $B_{r\omega}$ es el método extrapolado B_{rr} con parámetro de extrapolación $\frac{\omega}{r}$, para $r \neq 0$; entonces, para ν autovalor de B_{rr} ,

$$\lambda = \left(1 - \frac{\omega}{r}\right) + \frac{\omega}{r} \nu$$

es un autovalor de $B_{\omega r}$. Pero, según 3.2, ν es un autovalor de B_{rr} si y sólo si

$$(\nu - 1 + r)^2 = r^2 \mu^2 \nu.$$

Reemplazando ν , obtenido de la relación para λ , en esta última ecuación obtenemos

$$\left(\frac{r\lambda - r + \omega}{\omega} - 1 + r\right)^2 = r^2 \mu^2 \left(\frac{r\lambda - r + \omega}{\omega}\right)$$

De donde, $(\lambda - 1 + \omega)^2 = \omega \mu^2 [r(\lambda - 1) + \omega]$

Teorema 3.3.

Sea A consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall i$.
Si $B_{0,1}$ tiene autovalores reales

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ con $\underline{\mu} = \min_i |\mu_i|$ y $\bar{\mu} = \max_i |\mu_i|$, entonces $M_{r\omega}$ converge si y sólo si M_{01} converge para $\omega \in I_\omega$ y $r \in I_r$, donde estos intervalos son definidos como sigue:

a) para $\underline{\mu} \neq 0$,

$$I_\omega = \left(\frac{-2}{\sqrt{1-\mu^2}}, 0 \right) , I_r = (\beta(\mu^2), \alpha(\mu^2)) \text{ ó}$$

$$I_\omega = (0, 2] , I_r = (\alpha(\bar{\mu}^2), \beta(\bar{\mu}^2)) , \text{ ó}$$

$$I_\omega = \left[2, \frac{2}{\sqrt{1-\mu^2}} \right) , I_r = (\alpha(\bar{\mu}^2), \beta(\mu^2)) ;$$

b) para $\underline{\mu} = 0$,

$$I_\omega = (0, 2) , I_r = (\alpha(\bar{\mu}^2), \beta(\bar{\mu}^2)) ;$$

donde

$$\alpha(Z) = \frac{1}{\omega Z} \left(\frac{1}{2} \omega^2 Z - \frac{1}{2} \omega^2 + 2\omega - 2 \right) \text{ y}$$

$$\beta(Z) = \frac{1}{Z} (\omega Z - \omega + 2)$$

Demostración.

Según teorema 3.1, tenemos

$$(\lambda - 1 + \omega)^2 = \omega \mu^2 [r(\lambda - 1) + \omega]$$

donde λ es un autovalor de $B_{r\omega}$ y μ un autovalor de $B_{0,1}$. Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\lambda^2 - [2(1 - \omega) + r\omega\mu^2]\lambda + (\omega - 1)^2 + (r - \omega)\omega\mu^2 = 0$$

Dado λ es un autovalor de $B_{r\omega}$, el método $M_{r\omega}$ será convergente si y sólo si las raíces de esta ecuación son menores que uno en módulo; según lema 3.3, ello ocurrirá si y sólo si,

$$|(\omega - 1)^2 + (r - \omega)\omega\mu^2| < 1, \quad |2(1 - \omega) + r\omega\mu^2| < 1 + (\omega - 1)^2 + (r - \omega)\omega\mu^2$$

Fácilmente se prueba que estas desigualdades son equivalente al conjunto de desigualdades.

- i) $-(1 - \mu^2)\omega^2 + 2\omega - 2 < r\omega\mu^2$
- ii) $r\omega\mu^2 < -(1 - \mu^2)\omega^2 + 2\omega$
- iii) $-\frac{1}{2}(1 - \mu^2)\omega^2 + 2\omega - 2 < r\omega\mu^2$
- iv) $\mu^2 < 1$.

Esta última desigualdad da una condición necesaria y suficiente para que $M_{r\omega}$ sea convergente, ella es que el método $M_{0,1}$ sea convergente ($\bar{\mu} < 1$). De las desigualdades iii) y ii) obtenemos

$$-\frac{1}{2}(1 - \mu^2)\omega^2 + 2\omega - 2 < r\omega\mu^2 < -(1 - \mu^2)\omega^2 + 2\omega. \quad (3.1)$$

De donde,

$$(1 - \mu^2)\omega^2 < 4, \quad \forall \mu$$

Así,

$$(1 - \underline{\mu}^2)\omega^2 < 4$$

Luego,

$$-\frac{2}{\sqrt{1-\underline{\mu}^2}} < \omega < \frac{2}{\sqrt{1-\underline{\mu}^2}}, \quad \omega \neq 0$$

Ahora deseamos determinar los valores posibles del parámetro r .

Caso 1: $\underline{\mu} \neq 0$

Si $\omega > 0$, la desigualdad (3.1) llega a ser

$$\alpha(Z) = \frac{1}{\omega Z} \left(\frac{1}{2} \omega^2 Z - \frac{1}{2} \omega^2 + 2\omega - 2 \right) < r < \frac{1}{Z} (\omega Z - \omega + 2) = \beta(Z),$$

donde $Z = \mu^2$. Esta desigualdad será válida para todo r si

$$\max_Z \alpha(Z) < r < \min_Z \beta(Z) \quad (3.2)$$

Por otra parte, si $\omega < 0$ entonces (3.1) resulta ser equivalente a

$\beta(Z) < r < \alpha(Z)$, y ésta será cierta si

$$\max_Z \beta(Z) < r < \min_Z \alpha(Z), \quad (3.3)$$

Para finalizar el estudio de este caso buscamos donde ocurren estos máximos y mínimos.

$$\text{Tenemos } \alpha'(Z) = \frac{1}{\omega Z^2} \left(\frac{1}{2} \omega^2 - 2\omega + 2 \right) = \frac{1}{2\omega Z^2} (\omega - 2)^2,$$

vemos así que el signo de $\alpha'(Z)$ está determinado por el signo de ω . A su vez, $\beta'(Z) = \frac{1}{Z^2} (\omega - 2)$, de donde

$\beta'(Z) < 0$ ó $\beta'(Z) > 0$ según sea $\omega < 2$ ó $\omega > 2$ respectivamente.

Resumiendo

I_ω	$\alpha(Z)$	$\beta(Z)$	
$\left(-\frac{2}{\sqrt{1-\underline{\mu}^2}}, 0\right)$	decreciente	decreciente	
$(0, 2]$	creciente	decreciente	TABLA 1
$\left[2, \frac{2}{\sqrt{1-\underline{\mu}^2}}\right)$	creciente	creciente	

De estos resultados y de las desigualdades (3.3) y (3.2) obtenemos los dominios para el parámetro, y que damos en la tabla siguiente

I_ω	I_r	
$\left(-\frac{2}{\sqrt{1-\underline{\mu}^2}}, 0\right)$	$\left(\beta(\underline{\mu}^2), \alpha(\underline{\mu}^2)\right)$	
$(0, 2]$	$\left(\alpha(\overline{\mu}^2), \beta(\overline{\mu}^2)\right)$	TABLA 2
$\left[2, \frac{2}{1-\underline{\mu}^2}\right)$	$\left(\alpha(\overline{\mu}^2), \beta(\underline{\mu}^2)\right)$	

Caso 2: $\underline{\mu} = 0$

En este caso $\mu = 0$ es un autovalor de $B_{0,1}$; para $\mu = 0$ la desigualdad (3.1) implica

$$0 < \omega < 2.$$

En cambio, para un autovalor $\mu \neq 0$, el análisis es válido y los posibles valores de ω y r están dados en la tabla 2. Dado que en el caso, actualmente en estudio los valores de ω y r deben satisfacer (3.1) para todo μ , concluimos que tales dominios son respectivamente

$$I_\omega = (0,2) \text{ y } I_r = (\alpha(\bar{\mu}^2), \beta(\bar{\mu}^2))$$

Queda así entonces probado el teorema

Teorema 3.4.

Sea A consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall i$. Si $B_{0,1}$ tiene autovalores reales $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tales que $0 < \mu = \underline{\mu} = \min_i |\mu_i| = \bar{\mu} = \max_i |\mu_i| < 1$,

entonces para

$$r = \frac{(1 + \sqrt{1 - \mu^2})}{\mu^2}, \quad \omega = \frac{-1}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

ó también para

$$r = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}},$$

el radio espectral de $B_{\omega r}$ es igual a 0

Demostración :

De lema 3.1, concluimos que μ es un autovalor de $B_{0,1}$. Además, claramente μ^2 asume un único valor. De lema 2,

$$(v - 1 + r)^2 = r^2 \mu^2 v \quad (3.4)$$

donde v es un autovalor de B_{rr} , podemos encontrar r tal que esta ecuación tenga una raíz doble. En efecto, derivando con respecto a v tenemos

$$2(v - 1 + r) = r^2 \mu^2$$

de donde

$$v = \frac{2(1-r) + r^2 \mu^2}{2}$$

Reemplazando esta expresión en (3.4) obtenemos los valores de r para los cuales

$$v = \frac{2(1-r) + r^2 \mu^2}{2}$$

es una raíz doble (3.4), tales valores resultan ser

$$r_1 = \frac{2(1 + \sqrt{1 - \mu^2})}{\mu^2}, \quad r_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}.$$

Recordando que $B_{r\omega}$ es el método extrapolado B_{rr} con parámetro $\frac{\omega}{r}$, tenemos

$$\lambda = \left(1 - \frac{\omega}{r}\right) + \frac{\omega}{r} v.$$

Dado que v toma sólo un valor, de esta relación podemos determinar fácilmente

$$\frac{\omega}{r} \quad \text{tal que } \lambda = 0$$

Resulta,

$$\frac{\omega}{r} = \frac{1}{1-\nu}$$

De donde,

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

Con lo cual el teorema queda probado.

4. VALORES OPTIMOS DE LOS PARAMETROS PARA MATRICES CONSISTENTEMENTE ORDENADAS.

El siguiente teorema, cuya demostración omitimos y que puede ser encontrado en 4), nos da los valores de r y ω que minimizan el radio especial de la matriz de iteración de AOR para el caso en que la matriz de coeficientes A es consistentemente ordenada, y bajo la hipótesis adicional que los autovalores de $B_{0,1}$ son reales y menores que uno en módulo, ampliando así el resultado del teorema 3.4

Teorema 4.1.

Sea A consistentemente ordenada con $a_{ii} \neq 0, \forall i$. Si $B_{0,1}$ tiene autovalores reales $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tales que $\underline{\mu} = \min_i |\mu_i|$ y $\bar{\mu} = \max_i |\mu_i| < 1$, entonces los valores de ω y r que minimizan el radio espectral de $B_{\omega r}$ son:

a) para $\underline{\mu} = 0$,

$$\omega_{op} = r_{op} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$$

$$\min \rho (B_{r\omega}) = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$$

b) para $0 < \underline{\mu} < \bar{\mu}$ con $\sqrt{1 - \bar{\mu}^2} \leq 1 - \underline{\mu}^2$,

$$\omega_{op} = r_{op} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$$

$$\min \rho (B_{r\omega}) = \frac{1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$$

c) para $0 < \underline{\mu} < \bar{\mu}$ con $\sqrt{1 - \bar{\mu}^2} > 1 - \underline{\mu}^2$,

$$\omega_{op} = \frac{1 - \underline{\mu}^2 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}{(1 - \underline{\mu}^2)(1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2})}$$

$$r_{op} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2}}$$

$$\min \rho (B_{r\omega}) = \frac{\underline{\mu} \sqrt{\bar{\mu}^2 - \underline{\mu}^2}}{\sqrt{1 - \underline{\mu}^2} (1 + \sqrt{1 - \bar{\mu}^2})} , \text{ y}$$

d) para $0 < \underline{\mu} = \bar{\mu}$,

$$\omega_{op} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\mu}^2}}, \quad r_{op} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\bar{\mu}^2}}$$

ó también

$$\omega_{op} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{\mu}^2}}, \quad r_{op} = \frac{2\left(1+\sqrt{1-\bar{\mu}^2}\right)}{\mu^2}$$

$$\min \rho(B_{r\omega}) = 0$$

OBSERVACION.

Vemos de este teorema que en los casos a) y b) los valores óptimo de los parámetros de AOR coinciden con el valor óptimo del parámetro de sobrerelajación de SOR. Sin embargo, en los otros casos el método AOR es mejor que el método SOR.

BIBLIOGRAFIA

- 1) A. HADJIDIMOS,
"Accelerated overrelaxation method",
Mathematics of Computation
V. 32, 1978, pp. 149-157
- 2) M. MARTINS,
"On an accelerated overrelaxation method
for linear system with strictly diagonally
dominant matrix"
Mathematics of Computation
V. 35, 1980, pp. 1269-1273

- 3) M. MARTINS,
"Note of Irreducible diagonally Dominant
Matrix and the convergence of the AOR
Iterative Method"
Mathematics of Computation
V. 37, 1981, pp. 101-103
- 4) G. AVDELAS and A. HADJIDIMOS,
"Optimum Accelerated Overrelaxation
Method in a special Case"
Mathematics of Computation
V. 36, pp. 182-187.