Proyecciones
Vol. 22, N^o 1, pp. 31-62, May 2003.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile
DOI: 10.4067/S0716-09172003000100003

CARACTERISATION DES RELATIONS BINAIRES FINIES D-DEMI-RECONSTRUCTIBLES

JAMEL DAMMAK
Université Claude Bernard Lyon 1, France

Abstract

Given a binary relation R of basis E, we define its dual $R^\star$ by $R^\star(x,y) = R(y,x)$. A relation R is self-dual if it is isomorphic to $R^\star$. A binary relation R' is hemimorphic to R, if it is isomorphic to R or to $R^\star$. A binary relation R is d-half-reconstructible if it is determined by its restrictions of cardinality d, up to hemimorphism. In this paper we characterize the finite binary relations d-half-reconstructibile for every $d \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$.

MSC *: 03C60; 04A05; 05C20; 05C38; 05C40.*

Key Words *: Relation de différence, Relation binaire, Graphe, Hypomorphe, Hémimorphe, Reconstruction.*

1. Introduction.

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est noté $\mid E \mid$. Une relation binaire R de base E est une application du produit $E \times E$ dans $\{+,-\}$. Les éléments de E sont appelés sommets de R. Les paires de sommets sont appelées arêtes de R. Une arête $\{a,b\}$ est dite neutre si $R(a,b)=R(b,a)$, elle est dite pleine (resp. vide) si $R(a,b)=R(b,a)=+$ (resp. $R(a,b)=R(b,a)=-$). Une arête de R est dite orientée, si elle n'est pas neutre, dans ce cas on dit que a *domine* b si $R(a,b)=+$. On appelle duale de R, la relation $R^\star$ définie sur E par : pour tout élément $x \in E$, $R^\star(x,x)=R(x,x)$ et pour tous éléments distincts $x,y \in E$, $R^\star(x,y)=R(y,x)$. La relation R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. L'isomorphie entre deux relations R et R' est notée $R \sim R'$. Une relation binaire T est un tournoi lorsque pour tous x,y éléments distincts de sa base, $T(x,x)=-$ et $T(x,y) \neq T(y,x)$. Un 3-cycle (a,b,c) est un tournoi T à 3 éléments défini par $T(a,b)=T(b,c)=T(c,a)=+$. Une k-chaîne est un ordre total irréflexif à k éléments. Un diamant positif (resp. négatif) est un tournoi à 4 sommets constitué d'un 3-cycle (a,b,c) et d'un point d dominé par (resp. dominant) (a,b,c). Le point d est dit sommet du diamant. La restriction de R à une partie X de E, notée R/X, est la relation de base X définie par : pour tous éléments x,y de X, $R/X(x,y)=R(x,y)$.

Soient R et R' deux relations binaires de bases respectives E et E', et f une bijection de E sur E'. L'application f est dite un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de R sur R', si pour tous x,y éléments de E, $R'(f(x),f(y))=R(x,y)$ (resp. $R'(f(x),f(y))=R^\star(x,y)$). Dans ce cas on dit que R et R' sont isomorphes et on note $R' \sim R$ (resp. R et R' sont anti-isomorphes et on note $R' \sim R^\star$). Une relation binaire R' est hémimorphe à R, si elle est isomorphe à R ou à $R^\star$. Une relation binaire R est dite auto-duale si elle est isomorphe à $R^\star$. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale, si elle est non auto-duale et si toutes ses restrictions strictes sont auto-duales. Une relation binaire H s'abrite dans R si H est isomorphe à une restriction de R. Une restriction R/A s'inverse dans R' si $R'/A \sim R^\star/A$. Deux relations binaires R et R' de base commune E de cardinal n sont dites k-hémimorphes (resp. k-hypomorphes) lorsque pour toute partie X de E de cardinal k, $R'/X \sim R/X$ ou $R'/X \sim R^\star/X$ (resp. $R'/X \sim R/X$); définition analogue lorsque $card(X) \leq k$, on remplace alors le préfixe (k) par $(\leq k)$ dans les notations. Une relation R est dite k-demi-reconstructible (resp. k-reconstructible) si toute relation

k-hémimorphe (resp. k-hypomorphe) à R, lui est hémimorphe (resp. isomorphe); définition analogue pour la $(\leq k)$-demi-reconstructibilité (resp. $(\leq k)$-reconstructibilité). J. G. Hagendorf et G. Lopez ont montré [4] que les relations binaires finies sont (≤ 12)-demi-reconstructibles. J. Dammak [1] a amélioré ce résultat comme suit : Pour tout entier $k \geq 2$, les relations binaires finies abritant un non auto-dual de cardinal k, sont $(\leq k+6)$-demi-reconstructibles. Ces résultats ont motivé l'étude que nous faisons ici, la caractérisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibiles pour tout $d \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$, par exemple pour $d = 11$, nous montrons :

Théorème 1.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal à 21 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Alors R n'est pas 11-demi-reconstructible si et seulement si $k = 6$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.*

Esquisse de la preuve du théorème 1. La démarche est sensiblement la même pour les autres théorèmes de caractérisation. On considère deux relations binaires R et R', 11-hémimorphes définies sur une base finie E de cardinal au moins égal à 21. Soit k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base de l'une de ces restrictions. D'après [1], les relations binaires connexes sont 7-demi-reconstructibles donc également 11-demi-reconstructibles. On peut supposer alors que R possède au moins deux composantes connexes. D'autre part d'après [1] les relations binaires finies abritant un non auto-dual de cardinal k, sont $(\leq k+6)$-demi-reconstructibles. Donc si $2 \leq k \leq 5$, alors R est 11-demi-reconstructible. Si $k = 6$ et si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors les relations R et R' sont 5-hypomorphes et par suite nous montrons que si C est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ et si C n'est pas un tournoi sans diamant, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$. Il s'ensuit que si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors R est 11-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors R n'est pas 11-demi-reconstructible. Dans le cas $k \geq 7$ ou $k = 0$, la relation R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, et par suite R et R' sont 6-hypomorphes. Il s'ensuit que $R \sim R'$ (Voir [5]). Donc R est encore 11-demi-reconstructible.

2. Définitions. Notations. Rappels.

Somme lexicographique. Etant donnée une relation S de base $I = \{1, ..., k\}$, associons à chaque $i \in I$, une relation R_i de base I_i de telle sorte que les bases I_i soient deux à deux disjointes. La S-somme des R_i, notée $S(R_1, ..., R_k)$, est la relation définie sur la réunion des I_i de la façon suivante : $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = R_i(x, y)$ si $x, y \in I_i$ et $S(R_1, ..., R_k)(x, y) = S(i, j)$ si $x \in I_i$ et $y \in I_j$. Nous dirons aussi que la S-somme des R_i, est obtenue à partir de la relation S en dilatant chaque $i \in I$ par la relation R_i.

Relations particulières. Citons les relations irréflexives particulières suivantes :

- Une *presque-chaîne* de longueur k est obtenue à partir d'une k-chaîne en rendant neutre l'arête liant son premier et son dernier élément. Une presque-chaîne de longueur 3 est dite aussi une 3-consécutivité.

- Un *pic* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est neutre et les arêtes $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ sont orientées avec $R(a, c) = R(b, c)$.

- Un *drapeau* est une relation à 3 éléments a, b et c telle que l'arête $\{a, b\}$ est orientée, l'arête $\{b, c\}$ est pleine et l'arête $\{a, c\}$ est vide.

- Etant donné un entier h, T_h est le tournoi à $2h+1$ sommets : $0, 1, ..., 2h$ tel que pour tout sommet i, $T_h(i, i + k) = +$ pour $k \in \{1, ..., h\}$, (l'entier $i + k$ étant considéré modulo $2h + 1$). Une relation R est un élément de $D(T_h)$, si R est un tournoi obtenu en dilatant chaque sommet k de T_h par une chaîne p_k de cardinal fini. Rappelons que $D(T_h)$ est la classe des tournois finis sans diamant ([3], [6]).

- Soient un entier naturel $h \geq 3$ et l'ensemble $F = \{1, ..., h\}$.

* On appelle consécutivité $1 < 2 < ... < h$, l'une des quatre relations définies sur F comme suit :

$[R_1(x, y) = + \ ssi \ (y = x+1)]$, $[R_2(x, y) = + \ ssi \ (y = x+1 \ ou \ y = x)]$, $[R_3(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| > 1)]$, $[R_4(x, y) = + \ ssi \ (y = x + 1 \ ou \ |y - x| \neq 1)]$.

* On appelle cycle $1 < 2 < ... < h < 1$, l'une des quatre relations

définies sur F comme suit : pour toute consécutivité R_i, $(1 \leq i \leq 4)$, le cycle R'_i coïncide avec R_i, sauf peut être sur les couples $(1, h)$ et $(h, 1)$ où on a $R'_i(h, 1) = +$ et $R'_i(1, h) = -$.

- Etant donné un entier $n \geq 1$, on désigne par S_n, l'une des relations définies sur les $2n$ éléments $t_1, ..., t_{2n}$, par : $S_n(t_i, t_{i+n}) = S_n(t_{i+n}, t_i)$ pour $i = 1, ..., n$, $S_n(t_i, t_{i+k}) \neq S_n(t_{i+k}, t_i) = +$ pour $k = 1, ..., n-1$ et pour $i = 1, ..., 2n$ (les entiers ici sont considérés modulo $2n$). On notera δ_n un élément de la famille $E(S_n)$, des extensions de S_n obtenues en augmentant la base de S_n d'ensembles (éventuellement vides) deux à deux disjoints $s_1, ..., s_{2n}$, appelés secteurs de la relation, tels que :

i) Pour tout i, $\delta_n/s_i \cup \{t_i, t_{i+1}\}$ est une chaîne de premier élément t_i et de dernier élément t_{i+1}.

ii) Pour tout i, on a $\delta_n/s_i \cup s_{i+n}$ est un tournoi sans diamant.

iii) Pour tout i, pour tout x de s_i, pour tout y de s_{i+j}, $(j = 1, ..., n-1)$, on a $\delta_n(x, y) = -$, $\delta_n(y, x) = +$, $\delta_n(t_i, y) \neq \delta_n(y, t_i) = +$, et pour tout y de s_{i+j}, $(j = n, ..., 2n-1)$, on a $\delta_n(t_i, y) \neq \delta_n(y, t_i) = -$.

Intervalle, Décomposabililité. La notion suivante d'intervalle d'une relation binaire a été introduite par R. Fraïssé en [2]. Etant donnée une relation binaire R de base E, une partie I de E est un R-intervalle, lorsque pour tous éléments $a, b \in I$, tels que $R(a, a) = R(b, b)$, et pour tout élément $x \in E - I$, on a $R(a, x) = R(b, x)$ et $R(x, a) = R(x, b)$. Clairement, l'ensemble vide, les singletons et l'ensemble E sont des intervalles de R, appelés intervalles triviaux. Une relation ayant au moins trois sommets sera dite *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux, elle est dit *décomposable* dans le cas contraire. Si I et J sont deux R-intervalles, la valeur $R(a, b)$ est une constante quand a (resp. b) décrit l'ensemble I (resp. J) et on note $R(I, J)$ cette constante.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.1. *[5] Les relations binaires finies sont* (≤ 6)*-reconstructibles.*

Lemme 2.2. *[4] Les relations binaires finies sont* (≤ 12)*-demi-reconstructibles.*

Dans le cas des relations binaires connexes ce seuil a été abaissé dans [1] :

Lemme 2.3. *[1] Les relations binaires connexes finies sont (≤ 7)-demi-reconstructibles.*

Lemme 2.4. *[1] Pour tout entier $k \geq 2$, les relations binaires finies abritant un non auto-dual de cardinal k, sont $(\leq k+6)$-demi-reconstructibles.*

Lemme 2.5. *[8]. Soient R et R' deux relations binaires de même base E de cardinal fini n. Si R et R' sont q-hémimorphes (resp. q-hypomorphes) où $1 \leq q \leq n-1$, alors pour tout entier $p \leq min(q, n-q)$, R et R' sont p-hémimorphes (resp. p-hypomorphes).*

Relation de différence. La notion de relation de différence a été introduite par G. Lopez dans [5]. Soient deux relations binaires R et R' de même base E, qui sont (≤ 2)-hémimorphes. On définit la relation $D_{R,R'}$ de base E par : pour tout élément x de E, $D_{R,R'}(x,x) = +$ et pour tous éléments distincts x, y de E, $D_{R,R'}(x,y) = +$ lorsqu'il existe une suite $x = x_0, x_1, ..., x_k = y$ d'éléments de E telle que $R(x_i, x_{i+1}) \neq R'(x_i, x_{i+1})$ pour tout i élément de $\{0, 1, ..., k-1\}$. La relation $D_{R,R'}$ est une relation d'équivalence appelée relation de différence dont les classes sont appelées classes de différence.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.6. *[6] Soient R et R' deux relations binaires sur une même base finie E, (≤ 3)-hypomorphes, et soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, alors :*

i) Toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle commun à R et R'.

ii) Les restrictions de R et R' à une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ sont toutes deux, réflexives ou irréflexives.

iii) Si C_1 et C_2 sont deux classes différentes de l'équivalence $D_{R,R'}$, alors pour tous $(a,b), (c,d) \in C_1 \times C_2$ on a : $R(a,b) = R(c,d) = R'(a,b) =$

$R'(c,d)$ *et* $R(b,a) = R(d,c) = R'(b,a) = R'(d,c)$.

iv) Si R/C *n'est pas un tournoi, alors* R/C *admet une 3-consécutivité.*

v) Les 3-consécutivités de R/C *s'inversent dans* R'/C.

Lemme 2.7. *[6] Soient* R *et* R' *deux relations binaires* (≤ 4)*-hypomorphes sur une base finie* E*, et* C *une classe de l'équivalence* $D_{R,R'}$*. Alors :*

i) Si R/C *est un tournoi, alors il existe un entier* h *tel que* R/C *est un* $D(T_h)$.

ii) Si R/C *n'abrite pas de 3-cycle, alors* R/C *est soit une chaîne, soit une presque-chaîne, soit une consécutivité, soit un cycle.*

iii) Si R/C *abrite un 3-cycle, et si* R/C *n'est pas un tournoi, alors il existe un entier* n *tel que* R/C *est un élément de* $E(S_n)$.

iv) Les 3-cycles de R/C *s'inversent dans* R'/C.

Relation connexe. Une relation R de base finie E est dite connexe, si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe un chemin orienté reliant x à y, (c'est à dire une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$). La composante connexe d'une partie A de E, telle que R/A est connexe, est la plus grande partie D de E telle que D contient A et la restriction R/D soit connexe.

Relation fortement connexe. Une relation R de base finie E est dite fortement connexe, si pour tous éléments distincts x, y de E, il existe un chemin monotone orienté reliant x à y, c'est à dire une suite $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$, telle que pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$, on a $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$ et $R(x_i, x_{i+1}) = +$. La composante fortement connexe de R contenant x est la plus grande partie $D(x)$ de E telle que $D(x)$ contienne x et la restriction $R/D(x)$ soit fortement connexe.

Relations binaires non auto-duales minimales. Une relation binaire est dite non auto-duale minimale si elle est non auto-duale et toutes ses restrictions propres sont auto-duales.

Rappelons les résultats suivants :

Lemme 2.8. *[1] Soient $r \geq 2$ un entier, R et R' deux relations binaires (≤ 4)-hémimorphes sur une base finie E. Si R n'abrite aucune restriction non auto-duale à au plus r sommets, alors les relations $R, R^\star$ et R' sont deux à deux $(\leq r)$-hypomorphes.*

Lemme 2.9. *[1] Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E, et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales de R/C et I_0 la base d'une de ces restrictions. Alors la restriction R'/I_0 est isomorphe à $R^\star/I_0$.*

Notons que comme conséquence des lemmes 2.8 et 2.9, on a :

Corollaire 2.10. *Soit r un entier, $2 \leq r \leq 6$. Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E, C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Alors R/C et R'/C sont $(\leq r)$-hypomorphes ssi R/C n'abrite aucune relation non auto-duale minimale à au plus r sommets.*

Lemme 2.11. *[1] Soient d un entier au moins égal à 4, R et R' deux relations binaires $(\leq d)$-hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la plus petite cardinalité des restrictions non auto-duales minimales de R , I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, alors :*

$i)$ Si C est différente de sa composante connexe, alors C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

$ii)$ Si $d \geq 5$, $\mid I_0 \mid= 2$, et si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

$iii)$ Si $d \geq 6$, si R/I_0 est un drapeau, et si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

Lemme 2.12. *[1] Soient d un entier, $d \geq 6$, R et R' deux relations binaires $(\leq d)$-hémimorphes sur une base finie E, admettant une restriction non auto-duale, C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R, et I_0 la base* *d'une de ces restrictions. Si $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors :*

i) Si C est égale à sa composante connexe et si R/I_0 n'est pas un drapeau, alors $I_0 \cap C = \phi$.

ii) Si C est égale à sa composante connexe et si R/I_0 est un drapeau, d'arête neutre $\{c, a\}$ et $\{c, b\}$, alors $I_0 \cap C = \phi$ ou $I_0 \cap C = \{c\}$.

Lemme 2.13. *[1] Soient d un entier ≥ 5, R et R' deux relations binaires $(\leq d)$-hémimorphes sur une base finie E admettant une restriction non auto-duale, k la cardinalité minimale des restrictions non auto-duales qui s'abritent dans R, I_0 la base d'une de ces restrictions et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

i) Si C est différente de sa composante connexe, alors R/C et R'/C sont $(\leq d-1)$-hypomorphes.

ii) Si $d \geq 6$, $R'/I_0 \sim R/I_0$, R/I_0 un drapeau et $C \cap I_0 \neq \phi$, alors R/C et R'/C sont $(\leq d-2)$-hypomorphes.

iii) Si $d \geq 6$ et $R/I_0 \sim R'/I_0$, alors R/C et R'/C sont $(\leq max(k-1, d-k))$-hypomorphes.

3. Caractérisation des relations binaires 11-demi-reconstructibles

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 3.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal à 21 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Alors R n'est pas 11-demi-reconstructible si et seulement si $k = 6$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.*

La preuve du théorème 3.1 se base sur les résultats suivants :

Lemme 3.2. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 5)-hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$.*

i) Si R/C et R'/C sont (≤ 4)-hypomorphes et si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$.

ii) Si R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes et si R/C est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$.

Preuve. i) Le lemme 2.7 de G. Lopez et C. Rauzy nous donne la forme de R/C et R'/C. D'après la forme si R/C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$ alors $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$.

ii) Soit R/C un élément de $E(S_n)$, puisque R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes, alors d'après le lemme 2.6 R/C est réflexive ou irréflexive. Sans perte de généralité, on peut supposer que R/C est irréflexive. Comme R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes, le corollaire 2.10 prouve que R/C n'abrite aucune restriction non auto-duale de cardinal ≤ 5, et par suite $n \leq 3$. En effet, si $n \geq 4$ et si $\{t_1, t_{1+n}\}, \{t_2, t_{2+n}\}, \{t_3, t_{3+n}\}$ et $\{t_4, t_{4+n}\}$ sont 4 arêtes neutres de R/C, alors la restriction $R/\{t_1, t_{1+n}, t_2, t_3, t_{4+n}\}$ est une restriction non auto-duale de cardinal ≤ 5. Suivant la valeur de l'entier n, on a :

a) Si $n = 3$, alors $R/C = S_3$. En effet soient $\{t_1, t_4\}, \{t_2, t_5\}$ et $\{t_3, t_6\}$ les 3 arêtes neutres de R/C et supposons que le secteur s_1 contienne un élément x, alors $R/\{t_1, t_4, x, t_2, t_6\}$ est une restriction non auto-duale de cardinal 5. Donc $R/C = S_3$, et les arêtes neutres sont toutes de même type car R/C n'abrite aucune restriction non auto-duale de cardinal ≤ 5.

b) Si $n = 2$. Comme R/C n'abrite aucune restriction non auto-duale de cardinal ≤ 5, alors R/C est, soit un S_2, soit un élément de $E(S_2)$ avec 3 secteurs vides, un secteur de cardinal 1, et deux arêtes neutres de même type.

c) Si $n = 1$. On prouve de même que R/C est soit une presque-chaîne, soit un élément de $E(S_1)$ à 5 sommets de secteurs $s_1 = \{a\}, s_2 = \{b, c\}$ et tel que $R/\{a, b, c\}$ est un 3-cycle, soit un élément de $E(S_1)$ à 4 sommets.

Dans tous ces cas, on peut voir que $R'/C \sim R/C \sim R^\star/C$. □

Lemme 3.3. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 7)-hémimorphes sur une base finie E, D une composante connexe de R et k le plus petit* *cardinal des restrictions non auto-duales de R.*

i) Si $k \in \{5, 6\}$ et si R/D n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.

ii) Si $k = 6$ et si R/D est un élément de $E(S_n)$, alors $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.

Preuve. Soit D une composante connexe de R.

i) Comme R/D n'abrite aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 4, alors R/D et $R^\star/D$ sont (≤ 4)-hypomorphes. D'autre part D est une classe de l'équivalence $D_{R,R^\star}$, alors le lemme 2.7 prouve que si R/D n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$, alors $R/D \sim R^\star/D$. Comme R/D est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D \sim R/D$ ou $R'/D \sim R^\star/D$, et par suite $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$.

ii) Comme R/D n'abrite aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 5, alors R/D et $R^\star/D$ sont (≤ 5)-hypomorphes. D'autre part D est une classe de l'équivalence $D_{R,R^\star}$, alors le lemme 3.2 prouve que si R/D est élément de $E(S_n)$, alors $R/D \sim R^\star/D$. Comme R/D est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D \sim R/D$ ou $R'/D \sim R^\star/D$, et par suite $R'/D \sim R/D \sim R^\star/D$. □

Lemme 3.4. *Soient $d \in \{7, 8, 9, 10, 11\}$, R et R' deux relations binaires d-hémimorphes sur une base finie E à au moins $2d - 1$ éléments, et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Si $k = 6$ et si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R^\star$.*

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont $(\leq d)$-hémimorphes. Soit D une composante connexe de R. Comme $k = 6$, le lemme 3.3 prouve que si R/D n'est pas un tournoi sans diamant alors $R'/D \sim R/D \sim R/D^\star$. D'autre part D est un intervalle de R sur lequel R est réflexive ou irréflexive. Il s'ensuit que si R n'admet aucune composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors $R' \sim R \sim R^\star$. Si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D_1 \sim R/D_1$ ou $R'/D_1 \sim R^\star/D_1$, et par suite $R' \sim R$ si $R'/D_1 \sim R/D_1$ et $R' \sim R^\star$ si $R'/D_1 \sim R^\star/D_1$. □

Lemme 3.5. *Soient $d \in \{9, 10, 11\}$, R une relation binaire sur une base finie E et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Si $d - 5 \leq k \leq 6$ et si R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors R n'est pas d-demi-reconstructible.*

Preuve. On va distinguer les cas suivants :

Cas 1. $R/D_2 \sim R^\star/D_1$. Soit n_1 (resp. n_2) le nombre de composantes connexes D de R telles que $R/D \sim R/D_1$ (resp. $R/D \sim R/D_1^\star$).

- Si $n_1 \leq n_2$, on définit une relation R' de base E coïncidant avec R sauf sur $D_1 \times D_1$ où elle coïncide avec $R^\star$. Alors on peut voir que les relations R et R' sont $(\leq d)$-hémimorphes sans être hémimorphes.

- Si $n_2 < n_1$, on définit une relation R' de base E coïncidant avec R sauf sur $D_2 \times D_2$ où elle coïncide avec $R^\star$. Alors on peut voir que les relations R et R' sont $(\leq d)$-hémimorphes sans être hémimorphes.

Cas 2. $R/D_2 \sim R/D_1$. D'après le cas 1, on peut supposer que pour toute composante connexe D de R, R/D n'est pas isomorphe à $R^\star/D_1$. On définit une relation R' de base E coincidant avec R sauf sur $D_1 \times D_1$ où elle coïncide avec $R^\star$. Alors On peut voir que les relations R et R' sont $(\leq d)$-hémimorphes sans être hémimorphes.

Cas 3. R/D_1 et R/D_2 ne sont pas hémimorphes. D'après les cas 1 et 2, on peut supposer que pour toute composante connexe D de R, R/D n'est pas hémimorphe à R/D_1. On définit une relation R' de base E coïncidant avec R sauf sur $D_1 \times D_1$ où elle coïncide avec $R^\star$. Alors on peut voir que les relations R et R' sont $(\leq d)$-hémimorphes sans être hémimorphes. □

Preuve du théorème 3.1. Soient R une relation binaire finie de base E de cardinal au moins égal à 21 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. On a :

-Si R est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que R est 11-demi-reconstructible.

- Si $2 \leq k \leq 5$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 11-demi-reconstructible.

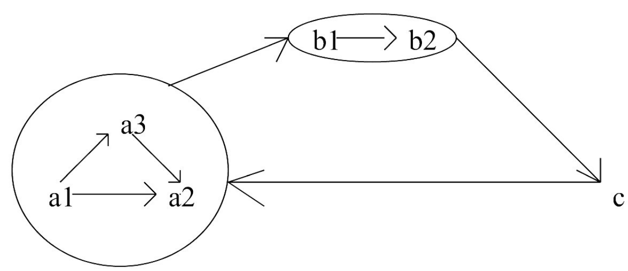
- Si $k = 6$ et si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors le lemme 3.4 prouve que R est 11-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 11-demi-reconstructible.

- Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est 11-demi-reconstructible.

Exemple de relation 12-demi-reconstructible mais non 11-demi-reconstructible

On considère :

R_1



$R = S(R_1, R_1) \qquad R' = S(R_1, R_1^*)$

- la relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, T_i est une i-chaîne irréflexive.

- S : une relation binaire vide de base $\{1, 2\}$.

Sous ces notations, on peut voir que les relations $R = S(R_1, R_1)$ et $R' = S(R_1, R^{\star}{}_1)$ sont 11-hémimorphes, sans être hémimorphes, et par suite R n'est pas 11-demi-reconstructible. Comme R_1 est un non auto-dual de cardinal 6, alors le lemme 2.4 prouve que R est 12-demi-reconstructible.

4. Caractérisation des relations binaires 10-demi-reconstructibles

Soit R une relation binaire de base E. La duale de R à une partie D de E, notée $R[D^{\star}]$, est la relation de base E coïncidant avec R sauf sur $D \times D$ où elle coïncide avec $R^{\star}$.

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 4.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal à 19 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Alors R n'est pas 10-demi-reconstructible si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

- $k \in \{5, 6\}$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.

- $k = 5$ et parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$.

La preuve du théorème 4.1 se base sur les résultats suivants :

Lemme 4.2. *Soient R et R' deux relations binaires (≤ 7)-hémimorphes sur une base finie E et C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Si C est différente de sa composante connexe alors:*

i) C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) $R'/C \sim R/C$.

Preuve. i) Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.11 prouve que C est un intervalle de R et R', sur lequel les restrictions de R et R' sont réflexives ou irréflexives.

ii) Comme C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 2.13 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 6)-hypomorphes. Il s'ensuit d'après le lemme 2.1 que $R'/C \sim R/C$. □

Lemme 4.3. *Soient $d \in \{7, 8, 9, 10\}$, R et R' deux relations binaires d-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $2d - 1, k$ le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions.*
Si $k = d - 5$, si aucune composante connexe de R n'est un tournoi sans diamant non auto-dual, et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont $(\leq d)$-hémimorphes. Soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.11, C est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 4.2 prouve que $R'/C \sim R/C$. Dans la suite C est égale à sa composante connexe. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$ et $k = d - 5$, alors le lemme 2.13 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 5)-hypomorphes. Puisque R/C n'est pas un tournoi sans diamant, alors d'après le lemme 3.2) $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que $R' \sim R$. □

Lemme 4.4. *Soient $d \in \{7, 8, 9, 10\}$, R et R' deux relations binaires d-hémimorphes sur une base finie E de cardinal n au moins égal à $2d - 1, k$ le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions.*
Si $k = d - 5$, si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R[{D^\star}_1]$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont $(\leq d)$-hémimorphes. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.11 toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Le lemme 4.3 prouve que $R'/(E - D_1) \sim R/(E - D_1)$, d'autre part R/D_1 est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D_1 \sim R/D_1$ ou $R'/D_1 \sim R^\star/D_1$. Il s'ensuit que $R' \sim R$ si $R'/D_1 \sim R/D_1$ et $R' \sim R[{D^\star}_1]$ si $R'/D_1 \sim R^\star/D_1$. □

Preuve du théorème 4.1. Soient R et R' deux relations binaires 10-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal à 19, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions. Quitte à échanger les rôles de R et $R^\star$, on va supposer que $R'/I_0 \sim R/I_0$. On a :

C_1. Si R est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que R est 10-demi-reconstructible.

C_2. Si $2 \leq k \leq 4$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 10-demi-reconstructible.

C_3. Si $k = 5$, on a les cas suivants :

C_{31}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 10-demi-reconstructible.

C_{32}. Si aucune composante connexe de R n'est un tournoi sans diamant non auto-dual. Comme $k = d - 5$ ($d = 10$ et $k = 5$), alors le lemme 4.3 prouve que R est 10-demi-reconstructible.

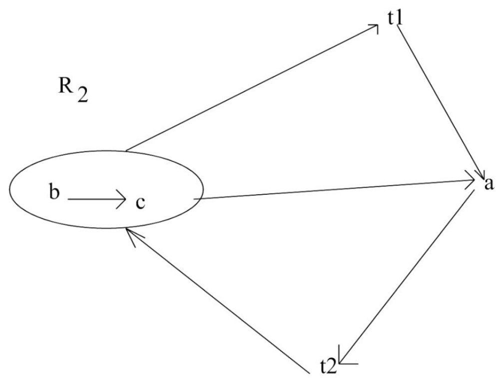
C_{33}. Si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual et si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 4.4 prouve que R est 10-demi-reconstructible. Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, on peut voir alors que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 10)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 10-demi-reconstructible.

C_4. Si $k = 6$ et R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors le lemme 3.4 prouve que R est 10-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 10-demi-reconstructible.

C_5. Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est 10-demi-reconstructible. □

Exemple de relation 11-demi-reconstructible mais non 10-demi-reconstructible.

On considère :



$R = S(R_1, R_2)$ et $R' = S(R_1^*, R_2)$

- la relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, T_i est une i-chaîne irréflexive.

- la relation R_2 est une relation irréflexive de base $\{t_1, t_2, a, b, c\}$ qui est un élément de $E(S_1)$, d'arête vide $\{t_1, t_2\}$, de secteurs $s_1 = \{a\}$ et $s_2 = \{b, c\}$ et telle que $R_2(s_2, s_1) = +$.

- S : une relation binaire vide de base $\{1, 2\}$.

Sous ces notations, on peut voir que les relations $R = S(R_1, R_2)$ et $R' = S(R_1^\star, R_2)$ sont 10-hémimorphes, sans être hémimorphes, et par suite R n'est pas 10-demi-reconstructible. Comme R_2 est un non auto-dual de cardinal 5, alors le lemme 2.4 prouve que R est 11-demi-reconstructible.

5. Caractérisation des relations binaires 9-demi-reconstructibles

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 5.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal 17 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales* *de R. Alors R n'est pas 9-demi-reconstructible si et seulement si R vérifie l'une des conditions suivantes :*

- $k = 4$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.

- $k = 4$ et parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[{D^\star}_1]$.

- $k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.

- $k = 6$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.

La preuve du théorème 5.1 utilise les lemmes suivants :

Lemme 5.2. *Soient $d \in \{8, 9\}$, R une relation binaire sur une base finie E et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Si $d - 4 \leq k \leq 5$ et R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$ alors R n'est pas d-demi-reconstructible.*

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 3.5, car dans la preuve du lemme 3.5 on n'a pas utilisé le fait que D_1 et D_2 sont des tournois sans diamant. □

Lemme 5.3. *Soient $d \in \{7, 8, 9\}$, R et R' deux relations binaires d-hémimorphes sur une base finie E à au moins $2d - 1$ éléments, et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R.*
Si $k = 5$ et si R admet au plus une composante connexe D_1 non auto-duale qui est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R^\star$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont $(\leq d)$-hémimorphes. Soit D une composante connexe de R. Comme $k = 5$, alors R et $R^\star$ sont (≤ 4)-hypomorphes. D'autre part D est une classe de l'équivalence $D_{R,R^\star}$, et d'après le lemme 2.6 D est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Comme R/D est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D \sim R/D$ ou $R'/D \sim R^\star/D$, et par suite si R/D est auto-dual alors $R'/D \sim R/D \sim R/D^\star$. Comme $k = 5$, le lemme 3.3 prouve que si R/D n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$ alors $R'/D \sim R/D \sim R/D^\star$. Il s'ensuit que si R n'admet aucune composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ alors $R' \sim R \sim R^\star$. De même si parmi les composantes connexes de R, une seule non auto-duale notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ alors $R' \sim R$ si $R'/D_1 \sim R/D_1$ et $R' \sim R^\star$ si $R'/D_1 \sim R^\star/D_1$. □

Preuve du théorème 5.1. Soient R et R' deux relations binaires 9-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal à 17, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions. Quitte à échanger les rôles de R et $R^\star$, on va supposer que $R'/I_0 \sim R/I_0$. On a les cas suivants :

C_1. Si R est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

C_2. Si $2 \leq k \leq 3$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

C_3. Si $k = 4$, on a :

C_{31}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 9-demi-reconstructible.

C_{32}. Si aucune composante connexe de R n'est un tournoi sans diamant non auto-dual, alors comme $k = d - 5$ $(d = 9 \ \ et \ \ k = 4)$, le lemme 4.3 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

C_{33}. Si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual, si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 4.4 prouve que R est 9-demi-reconstructible. Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors on peut voir que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 9)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 9-demi-reconstructible.

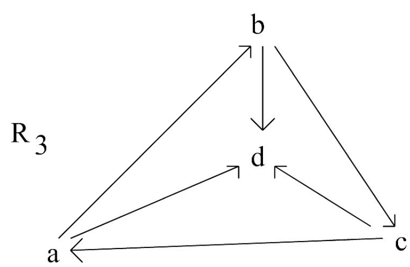
C_4. Si $k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$, alors le lemme 5.2 prouve que R n'est pas 9-demi-reconstructible. Si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ alors le lemme 5.3 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

C_5. Si $k = 6$ et R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors le lemme 3.4 prouve que R est 9-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 9-demi-reconstructible.

C_6. Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

Exemple de relation 10-demi-reconstructible mais non 9-demi-reconstructible.

On considère :



$$R = S(R_1, R_3) \text{ et } R' = S(R_1^*, R_3)$$

- La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, T_i est une i-chaîne irréflexive.

- La relation R_3 est un tournoi de base $\{a, b, c, d\}$ prenant la valeur $+$ sur les seuls couples $(a, b), (b, c), (c, a)$ et (x, d) avec $x = a, b, c$, R_3 est un diamant.

- S : une relation binaire vide de base $\{1, 2\}$.

Sous ces notations, on peut voir que les relations $R = S(R_1, R_3)$ et $R' = S(R_1^\star, R_3)$ sont 9-hémimorphes sans être hémimorphes, et par suite R n'est pas 9-demi-reconstructible. Comme R_3 est un non auto-dual de cardinal 4, alors le lemme 2.4 prouve que R est 10-demi-reconstructible.

6. Caractérisation des relations binaires 8-demi-reconstructibles

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 6.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal à 15 et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Alors R n'est pas 8-demi-reconstructible si et seulement si R vérifie l'une des conditions suivantes :*

- *$k = 3$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, et aucun point de ces composantes connexes n'est le sommet d'un drapeau.*

- *$k = 3$ et parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual, disjoint de tout drapeau, et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[{D^\star}_1]$.*

- *$k = 4$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.*

- *$k = 4$, parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[{D^\star}_1]$.*

- *$k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.*

- *$k = 6$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.*

La preuve du théorème 6.1 se base sur les résultats suivants :

Lemme 6.2. *Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal à 15, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R. Si R/I_0 est un drapeau, $D \cap I_0 \neq \phi$ et $R'/I_0 \sim R/I_0$ alors $R'/D \sim R/D$.*

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 8)-hémimorphes. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors le lemme 2.11 prouve que toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R', sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors d'après le lemme 4.2 $R'/D \sim R/D$. Dans la suite D est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme R/I_0 est un drapeau, $R'/I_0 \sim R/I_0$ et $D \cap I_0 \neq \phi$, alors le lemme 2.13 prouve que R/D et R'/D sont (≤ 6)-hypomorphes. Il s'ensuit, d'après le lemme 2.1, que $R'/D \sim R/D$. □

Lemme 6.3. *Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal $15, k$ le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R.*
Si $k = 3$ et si chaque composante connexe de R qui est un tournoi sans diamant est auto-duale ou contient un sommet d'un drapeau, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R^\star$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 4.3. □

Lemme 6.4. *Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal 15, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R.*
Si $k = 3$, si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual disjoint de tout drapeau et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R[{D^\star}_1]$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 4.4. □

Lemme 6.5. *Soient R une relation binaire sur une base finie E et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Si $k = 3$ et si R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales qui sont des tournois sans diamants, et disjoints de tout drapeau, alors R n'est pas 8-demi-reconstructible.*

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du lemme 3.5. □

Lemme 6.6. *Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal 15, k le plus petit cardinal des restrictions non autohémimorphes-duales de R, et I_0 la base d'une de ces restrictions.*
Si $k = 4$, et aucune composante connexe non auto-duale de R n'est un tournoi sans diamants ou un élément de $E(S_n)$, et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 8)-hémimorphes. Soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, d'après le lemme 2.11, C est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 4.2 prouve que $R'/C \sim R/C$. Dans la suite C est égale à sa composante connexe. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0, d = 8$ et $k = 4$, alors le lemme 2.13 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 4)-hypomorphes. Puisque C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$ alors d'après le lemme 2.7 $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que $R' \sim R$. □

Lemme 6.7. *Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal 15, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, et I_0 la base d'une de ces restrictions.*
Si $k = 4$, si parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R[D^{\star}{}_1]$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 8)-hémimorphes. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.11 toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Le lemme 6.6 prouve que $R'/(E - D_1) \sim R/(E - D_1)$, d'autre part R/D_1 est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D_1 \sim R/D_1$ ou $R'/D_1 \sim R^{\star}/D_1$. Il s'ensuit que $R' \sim R$ si $R'/D_1 \sim R/D_1$ et $R' \sim R[D^{\star}{}_1]$ si $R'/D_1 \sim R^{\star}/D_1$. □

Preuve du théorème 6.1. Soient R et R' deux relations binaires 8-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal à 15, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions. Quitte à échanger les rôles de R et $R^\star$, on va supposer que $R'/I_0 \sim R/I_0$. On a les cas suivants :

C_1. Si R est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

C_2. Si $k = 2$, alors le lemme 2.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

C_3. Si $k = 3$, on a :

C_{31}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant et disjoints de tout drapeau, alors le lemme 6.2 prouve que R n'est pas 8-demi-reconstructible.

C_{32}. Si chaque composante connexe de R qui est un tournoi sans diamant est auto-dual où contient un sommet d'un drapeau, alors le lemme 6.3 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

C_{33}. Si parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual disjoint de tout drapeau. Si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 6.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible . Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors on peut voir que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 8)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 8-demi-reconstructible.

C_4. Si $k = 4$, on a :

C_{41}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$, alors le lemme 5.2 prouve que R n'est pas 8-demi-reconstructible.

C_{42}. Si aucune composante connexe non auto-duale de R n'est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, alors le lemme 6.6 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

C_{43}. Si parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$. Si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 6.7 prouve que R est 8-demi-reconstructible. Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors on peut voir que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 8)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 8-demi-reconstructible.

C_5. Si $k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$, alors le lemme 5.2 prouve que R n'est pas 8-demi-reconstructible. Si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, alors le lemme 5.3 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

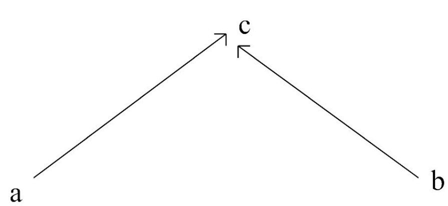
C_6. Si $k = 6$ et R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors le lemme 3.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 8-demi-reconstructible.

C_7. Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

Exemple de relation 9-demi-reconstructible mais non 8-demi-reconstructible.

On considère :

R_4



$R = S(R_1, R_4)$ et $R' = S(R_1^*, R_4)$

- La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, T_i est une i-chaîne irréflexive.

- La relation R_4 est une relation irréflexive à trois éléments a, b et c définie par : $R_4(a, b) = R_4(b, a) = -$, $R_4(a, c) = -R_4(c, a) = +$ et $R_4(b, c) = -R_4(c, b) = +$. R_4 s'appelle pic.

- S : une relation binaire vide de base $\{1, 2\}$.

Sous ces notations, on peut voir que les relations $R = S(R_1, R_4)$ et $R' = S(R_1^\star, R_4)$ sont 8-hémimorphes, sans être hémimorphes, et par suite R n'est pas 8-demi-reconstructible. Comme R_4 est un non auto-dual de cardinal 3, alors le lemme 2.4 prouve que R est 9-demi-reconstructible.

7. Caractérisation des relations binaires 7-demi-reconstructibles

Dans ce paragraphe nous obtenons :

Théorème 7.1. *Soient R une relation binaire de base finie E de cardinal au moins égal* 13 *et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R. Alors R n'est pas* 7*-demi-reconstructible si et seulement si R vérifie l'une des conditions suivantes :*

- $k = 2$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.

- $k = 2$, et parmi les composantes connexes de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant non auto-dual, et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$.

- $k = 3$, R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$ disjoints de tout drapeau.

- $k = 3$, et parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ disjoint de tout drapeau, et $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$.

- $k = 4$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales.

- $k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$.

- $k = 6$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant.

La preuve du théorème 7.1 se base sur les résultats suivants :

Lemme 7.2. *Soient R et R' deux relations binaires 7-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal $13, k$ le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R.*
Si R/I_0 est un drapeau, si $R'/I_0 \sim R/I_0$, si R/D est un élément de $E(S_n)$ et si $D \cap I_0 \neq \phi$ alors $R'/D \sim R/D$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 7)-hémimorphes. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors le lemme 2.11 prouve que toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Si l'équivalence $D_{R/D,R'/D}$ possède au moins deux classes, alors d'après le lemme 4.2 $R'/D \sim R/D$. Dans la suite D est une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme R/I_0 est un drapeau, $d = 7$, $R'/I_0 \sim R/I_0$, et $D \cap I_0 \neq \phi$, alors le lemme 2.13 prouve que R/D et R'/D sont (≤ 5)-hypomorphes. Puisque R/D est un élément de $E(S_n)$, alors le lemme 3.2 prouve que $R'/D \sim R/D$. □

Lemme 7.3. *Soient R et R' deux relations binaires 7-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal 13, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R.*
Si $k = 3$, si R n'admet aucune composante connexe qui est un tournoi sans diamant non auto-dual, si chaque composante connexe qui est un élément de $E(S_n)$ est auto-duale ou contient un sommet d'un drapeau, si de plus $R'/I_0 \sim R/I_0$ alors $R' \sim R$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 7)-hémimorphes. Soit C une classe de l'équivalence $D_{R,R'}$. Comme $R'/I_0 \sim$

R/I_0, alors d'après le lemme 2.11 C est un intervalle de R et R' sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Si C est différente de sa composante connexe, alors le lemme 4.2 prouve que $R'/C \sim R/C$. De même si C est un élément de $E(S_n)$ et C contient un sommet d'un drapeau, le lemme 7.2 prouve que $R'/C \sim R/C$. Dans la suite C est égale à sa composante connexe et C n'est ni un tournoi sans diamant ni un élément de $E(S_n)$. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0, d = 7$ et $k = 3$, alors le lemme 2.13 prouve que R/C et R'/C sont (≤ 4)-hypomorphes, et par suite d'après le lemme 2.7 $R'/C \sim R/C$. Il s'ensuit que $R' \sim R$. □

Lemme 7.4. *Soient R et R' deux relations binaires 7-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal $13, k$ le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R, I_0 la base d'une de ces restrictions et D une composante connexe de R.*
Si $k = 3$, si parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ disjoint de tout drapeau, et si $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors $R' \sim R$ ou $R' \sim R[D^{\star}{}_1]$.

Preuve. Le lemme 2.5 prouve que les relations R' et R sont (≤ 7)-hémimorphes. Comme $R'/I_0 \sim R/I_0$, alors d'après le lemme 2.11) toute classe de l'équivalence $D_{R,R'}$ est un intervalle de R et R', sur lequel R et R' sont réflexives ou irréflexives. Le lemme 7.3 prouve que $R'/(E - D_1) \sim R/(E - D_1)$, d'autre part R/D_1 est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que $R'/D_1 \sim R/D_1$ ou $R'/D_1 \sim R^{\star}/D_1$. Il s'ensuit que $R' \sim R$ si $R'/D_1 \sim R/D_1$ et $R' \sim R[D^{\star}{}_1]$ si $R'/D_1 \sim R^{\star}/D_1$. □

Lemme 7.5. *Soient R une relation binaire sur une base finie E et k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R.*

i) Si R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors R n'est pas 7-demi-reconstructible.

ii) Si $k = 3$ et R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$ disjoints de tout drapeau, alors R n'est pas 7-demi-reconstructible.

iii) Si $k = 4$ et R admet au moins deux composantes connexes D_1 et D_2 non auto-duales, alors R n'est pas 7-demi-reconstructible.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 3.5, car dans la preuve du lemme 3.5 on n'a pas utilisé le fait que D_1 et D_2 sont des tournois sans diamant. □

Preuve du théorème 7.1. Soient R et R' deux relations binaires 7-hémimorphes sur une base finie E de cardinal au moins égal à 13, k le plus petit cardinal des restrictions non auto-duales de R et I_0 la base d'une de ces restrictions. Quitte à échanger les rôles de R et $R^\star$, on va supposer que $R'/I_0 \sim R/I_0$. On va distinguer les cas suivants :

C_1. Si R est connexe, alors le lemme 2.3 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

C2. Si $k = 2$, on a :

C_{21}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamants, alors *i*) du lemme 7.5 prouve que R n'est pas 7-demi-reconstructible.

C_{22}. Si R n'admet aucune composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, comme $k = d - 5$ ($d = 7 \quad et \quad k = 2$), alors le lemme 4.3 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

C_{23}. Si parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant et si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 4.4 prouve que R est 7-demi-reconstructible. Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors on peut voir que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 7)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 7-demi-reconstructible.

C_3. Si $k = 3$, on les sous cas suivants :

C_{31}. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamants ou des éléments de $E(S_n)$, et si ces composantes connexes sont des éléments de $E(S_n)$ disjoints de tout drapeau, alors le *ii*) du lemme 7.5 prouve que R n'est pas 7-demi-reconstructible.

C_{32}. Si R n'admet aucune composante connexe qui est un tournoi sans diamant non auto-dual, si chaque composante connexe qui est un élément de $E(S_n)$ est auto-duale ou contient un sommet d'un drapeau, alors le lemme 7.3 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

C_{33}. Si parmi les composantes connexes non auto-duales de R, une seule notée D_1 est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$ disjoint de tout drapeau. Si $R^\star$ est isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors le lemme 7.4 prouve que R est 7-demi-reconstructible. Si $R^\star$ n'est pas isomorphe à $R[D^\star{}_1]$, alors on peut voir que les relations R et $R[D^\star{}_1]$ sont (≤ 7)-hémimorphes sans être hémimorphes. Il s'ensuit que R n'est pas 7-demi-reconstructible.

C_4. Si $k = 4$, et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales, alors le *iii*) du lemme 7.5 prouve que R n'est pas 7-demi-reconstructible. Si R admet au plus une composante connexe non auto-duale, alors le lemme 2.3 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

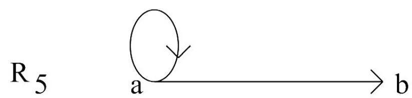
C_5. Si $k = 5$ et R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant ou des éléments de $E(S_n)$, alors le lemme 5.2 prouve que R n'est pas 7-demi-reconstructible. Si R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant ou un élément de $E(S_n)$, alors le lemme 5.3 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

C_6. Si $k = 6$ et R admet au plus une composante connexe non auto-duale qui est un tournoi sans diamant, alors le lemme 3.4 prouve que R est 7-demi-reconstructible. Si R admet au moins deux composantes connexes non auto-duales qui sont des tournois sans diamant, alors le lemme 3.5 prouve que R n'est pas 7-demi-reconstructible.

C_7. Si $k \geq 7$ ou $k = 0$. Dans ce cas R n'admet aucune restriction non auto-duale de cardinal inférieur ou égal à 6, alors le lemme 2.1 prouve que R est 7-demi-reconstructible.

Exemple de relation 8-demi-reconstructible mais non 7-demi-reconstructible

On considère :



$R = S(R_1, R_5)$ et $R' = S(R_1^*, R_5)$

- La relation $R_1 = C_3(T_1, T_2, T_3)$ où C_3 est un 3-cycle de base $\{1, 2, 3\}$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, T_i est une i-chaîne irréflexive.

- La relation R_5 est une relation à deux éléments a et b définie par : $R_5(a, a) = -R_5(b, b) = +$ et $R_5(a, b) = -R_5(b, a) = +$.

- S : une relation binaire vide de base $\{1, 2\}$.

Sous ces notations, on peut voir que les relations $R = S(R_1, R_5)$ et $R' = S(R_1^\star, R_5)$ sont 7-hémimorphes, sans être hémimorphes, et par suite R n'est pas 7-demi-reconstructible. Comme R_5 est un non auto-dual de cardinal 2, alors le lemme 2.4 prouve que R est 8-demi-reconstructible.

References

[1] J. DAMMAK : La dualité dans la demi-reconstruction des relations binaires finies, CRAS, Série I 327 (1998), p. 861-864.

[2] R. FRAÏSSÉ : L'intervalle en théorie des relations, in orders, descriptions and roles, M. Pouzet et D. Richard éd. North-Holland, 1984, p. 313-342.

[3] C. GNANVO et P.ILLE : La reconstruction des tournois. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, série I, (1988), p. 577-580.

[4] J. G. HAGENDORF et G. LOPEZ : La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments. C. R. Acad. Sci. Paris, série I, 317 (1993), P. 7-12.

[5] G. LOPEZ : L'indéformabilité des relations et multirelations binaires. Zeitschrift. Math. Logik Grundlagen Math. 24 (1978), p. 303-317.

[6] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), I. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd. 38, S. 27-37 (1992).

[7] G. LOPEZ et C. RAUZY : Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2,3,4 and (n-1), II. Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. Bd 38, S. 157-168 (1992).

[8] M. POUZET : Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations. Math. Zeitschr. 150 (1976), p. 117-134.

Received : December 2002.

J. Dammak
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
B.P. 802, 3018 Sfax
Tunisie
Fax 216 74 274437
e-mail : jdammak@yahoo.fr

R_5

$$R = S(R_1, R_5) \text{ et } R' = S(R_1^*, R_5)$$